

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 16: (F10T1A5) Bestimmen Sie alle Singularitäten von

$$f(z) = \frac{e^{\sin(z)} - \cos(z) - z}{(\sin(z))^2}$$

sowie deren Typ (einschließlich der Ordnung jedes auftretenden Pols). Sie dürfen die Nullstellen der komplexen Sinusfunktion als bekannt voraussetzen.

Aufgabe 17: (F18T3A3)

$$\begin{aligned} \text{Es sei } f : \mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{(z+i)^2}{(z^2+1)^2} + e^{-\frac{1}{z^2}}. \end{aligned}$$

- (a) Bestimmen Sie für jede der isolierten Singularitäten von f den Typ und geben Sie den Hauptteil der Laurentreihenentwicklung in einer punktierten Umgebung für jede der isolierten Singularitäten an.
- (b) Zeigen Sie, daß f eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 0\}$ besitzt.

Aufgabe 18: (H07T1A3)

- a) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung der meromorphen Funktion $f(z) = \frac{3}{z^2+z-2}$ auf dem unbeschränkten Kreisring $R_{2,\infty} := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ um $z = 0$.
- b) Besitzt f eine Stammfunktion auf $R_{2,\infty}$? Begründen Sie Ihre Antwort.