Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 13: (H09T2A5)

a) Finden Sie die Laurentreihenentwicklung der Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^3(z^2+1)}$ um $z_0 = -2$. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der gefundenen Laurentreihe.

b) Berechnen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{|z+1|=2} f(z)dz$. Der Integrationsweg wird in positiver Richtung (gegen den Uhrzeigersinn) durchlaufen.

Aufgabe 14: (H06T3A3)
Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$

a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f auf $A := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < 1\}$ und $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-2| < 1\}$.

b) Berechnen Sie für $\begin{array}{rcl} \gamma : [0,1] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & 3e^{2\pi i t} \end{array}$ das Integral $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Aufgabe 15: (H07T2A1)
Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte, offene und zusammenhängende Menge. Es seien $n \in \mathbb{N}$, $w_1, ..., w_n \in \mathbb{C}$ und für $\alpha > 0$ betrachten wir die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \overline{G} & \to & [0, \infty[\\ z & \mapsto & \displaystyle\prod_{j=1}^{n} |z - w_j|^\alpha \end{array}$$

a) Zeigen Sie: $\sup\limits_{z \in \overline{G}} f(z) = \max\limits_{z \in \overline{G}} f(z)$.

b) Sei $z_0 \in \overline{G}$ mit $f(z_0) = \max\limits_{z \in \overline{G}} f(z)$. Zeigen Sie, daß $z_0 \in \partial G := \overline{G} \backslash G$ ist.