Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 10: (F13T3A2)

a) Sei $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $y \neq 0$. Zeigen Sie, daß

$$|\sin(z)| \geq \frac{1}{2}(e^{|y|} - e^{-|y|})$$

ist. (Hinweis: Man kann von der Formel $\sin(z) = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ ohne Beweis Gebrauch machen.)

b) Gegeben sei die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(z) := \dfrac{\sin(nz)}{n}$ für $z \in \mathbb{C}$. Geben Sie die Menge M aller Punkte $z \in \mathbb{C}$ an, für die $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimmen Sie die Grenzfunktion

$$f(z) := \lim_{n\to\infty} f_n(z), \quad z \in M.$$

Aufgabe 11: (F03T3A1)
Es sei $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und $f : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ analytisch mit $f(0) = 0$. Zeige

a) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ konvergiert lokal gleichmäßig absolut auf $\mathbb{E}$.

b) Ist f sogar auf einer offenen Umgebung U des Abschlußes $\overline{\mathbb{E}}$ analytisch und konvergiert $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ absolut für alle $z \in \overline{\mathbb{E}}$, so ist f identisch 0.

Aufgabe 12: (H01T2A3)
Durch $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ werde eine ganze Funktion f definiert. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden drei Aussagen:

a) Für jedes $y \in \mathbb{R}$ ist $f(iy) \in \mathbb{R}$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $\overline{a_n} = (-1)^n a_n$.

c) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\overline{f(z)} = f(-\overline{z})$.