Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 7: (F11T3A4)

a) Sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 1$. Zeigen Sie, daß es ein $z \in U$ gibt mit $f(z) \in \mathbb{R}$ und $f(z) > 1$.

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man

   i) auf die Voraussetzung $f(0) = 0$ verzichtet, oder

   ii) U durch eine beliebige offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ mit $0 \in U$ und $1 \in U$ ersetzt?

Aufgabe 8: (H15T3A4)

a) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion. Für ein $M \in \mathbb{R}^+$ und ein $\alpha \in \mathbb{R}$ gelte

$$|f(z| \leq M|z|^\alpha$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie: $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n > \alpha$; hierbei ist $f^{(0)} = f$ und $f^{(n)}$ die $n-$te Ableitung von f.

b) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}_0$, $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit $p^{(n)}(0) = 0$ für alle $n > n_0$. Zeigen Sie: p ist ein Polynom vom Grad $\leq n_0$.

c) f erfülle die Voraussetzungen von Aufgabenteil (a). Zeigen Sie: f ist entweder konstant oder hat mindestens eine Nullstelle.

Aufgabe 9: (F00T1A1)
Gegeben ist die Reihe

$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + ... + z^{2^n} + ...$$

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

b) Zeigen Sie, daß für z innerhalb des Konvergenzkreises und für $n = 1, 2, 3, ...$ gilt:

$$f(z) = z^2 + z^4 + ... + z^{2^n} + f(z^{2^n}).$$

c) Zeigen Sie, daß obige Reihe in jeder Wurzel der Gleichungen

$$z = 1, z^2 = 1, z^4 = 1, ..., z^{2^n} = 1, ...$$

divergiert.