Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 4: (H06T2A2)
Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$?

c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an?

Aufgabe 5: (H00T1A5)
Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind und geben Sie in jedem der Fälle eine kurze Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Die komplexe Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die gleichen Nullstellen wie ihre Einschränkung auf die reelle Achse.

b) Für den einmal im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreis S_1^+ gilt:

$$\int_{S_1^+} \frac{e^z - 1}{z} dz = 2\pi i.$$

c) Genügt eine ganze Funktion f der Beziehung $|f(z)| \leq |e^z|$, so gilt $f(z) = ce^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einem $c \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6: (F18T1A3)
Wie üblich identifizieren wir $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch die $\mathbb{R}-$lineare Abbildung $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{C} \\ (x,y) & \mapsto & x+iy \end{array}$.

Sei

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{z^4}\right) & \text{falls } z \neq 0 \\ 0 & \text{falls } z = 0 \end{cases} \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß f in $(0,0)$ partiell differenzierbar ist und daß f in $(0,0)$ die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt.

b) Zeigen Sie, daß f in $z = 0$ nicht komplex differenzierbar ist. Begründen Sie, warum dies nicht im Widerspruch zum Ergebnis von Teil (a) steht.