Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 37: (H11T2A4)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^{y(t)}t^3,\ y(0) = y_0.$$

Gibt es Anfangswerte $y_0 \in \mathbb{R}$, so daß die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert?

b) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) - 3y(t) = te^{4t},\ y(1) = 2.$$

Aufgabe 38: (H09T3A5)
Finden Sie die allgemeine Lösung des linearen homogenen Systems

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \omega$$

für $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\lambda < 0$. Welchen Typs ist das Gleichgewicht $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$? Skizieren Sie das Phasenportrait, begründen Sie seine Hauptmerkmale.

Aufgabe 39: (F18T3A2)

(a) Bestimmen Sie Art und Lage aller lokalen Extrema der Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xe^{x-y^2} \end{array}$.

(b) Zeigen Sie, daß alle stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x} = 2xy \tag{1}$$
$$\dot{y} = 1 + x \tag{2}$$

stabil sind, wobei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Verwenden Sie dazu das Resultat aus Teilaufgabe a).