

Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 34: (F13T1A4)

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$.

- a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(t) + 4y(t) + f(t) = 0$$

- b) Zeigen Sie, daß für jede Lösung y dieser Differentialgleichung gilt:

$$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0.$$

Aufgabe 35: (F18T1A5)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt[3]{y^2} \quad \text{und} \quad y(0) = 0 \tag{1}$$

- a) Bestimmen Sie alle auf ganz \mathbb{R} definierten Lösungen von (1). Ein expliziter Nachweis, daß es keine weiteren Lösungen gibt, ist nicht erforderlich.
- b) Bestimmen Sie alle $b \in \mathbb{R}$, so daß es eine auf ganz \mathbb{R} definierte Lösung von (1) gibt, welche neben $y(0) = 0$ auch $y(1) = b$ erfüllt.

Aufgabe 36: (H14T2A5)

- a) Es sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß f lokal Lipschitzstetig bzgl. y ist.
 $(t, y) \mapsto e^t \sin(y)$

- b) Zeigen Sie, daß das Anfangswertproblem

$$y'(t) = e^t \sin(y(t)) \quad \text{für } t > 0 \quad \text{und } y(0) = 1$$

eine eindeutige Lösung $y : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ besitzt.

- c) Zeigen Sie, daß $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ gilt, wobei y die Lösung aus Aufgabenteil (b) bezeichne.