Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 31: (F12T1A3)
Es sei $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}$. Zeigen Sie, daß es eine holomorphe Funktion $h : U \to \mathbb{C}$ mit

$$e^{h(z)} = 1 + z^5 + z^{10}$$

für alle $z \in U$ gibt.

Aufgabe 32: (H10T1A3)
Konstruieren Sie eine gebrochen-rationale Abbildung (Möbiustransformation) f, die die Kreisscheibe

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z+1| < 2\}$$

auf die obere Halbebene

$$H := \{w \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(w) > 0\}$$

abbildet. Ist eine solche Abbildung eindeutig bestimmt?

Aufgabe 33: (H17T3A1)
Es sei $\Omega := \mathbb{C}\backslash[-1,1] = \mathbb{C}\backslash\{z \in \mathbb{C} : -1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 1, \mathrm{Im}\,(z) = 0\}$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Auf Ω existiert keine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, dh. es gibt keine holomorphe Funktion $g : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{g(z)} = f(z)$ für alle $z \in \Omega$.

b) Auf Ω existiert eine holomorphe Logarithmusfunktion der Funktion $z \mapsto h(z) = i\frac{z+1}{z-1}$, dh. es gibt eine holomorphe Funktion $w : \Omega \to \mathbb{C}$ mit $e^{w(z)} = h(z)$ für alle $z \in \Omega$.