

## Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 28:** (H12T1A4)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms  $p(z) = 2z^5 - 6z^2 + z + 1$  im Ringgebiet  $1 \leq |z| \leq 2$ . Sind darunter auch reelle Nullstellen?

**Aufgabe 29:** (H05T2A1) Beweisen Sie folgende Aussagen

a) Die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} z^n$$

hat den Konvergenzradius  $\frac{1}{2}$ .

b) Ist  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  die offene Einheitskreisscheibe und  $D \subseteq \mathbb{C}$  eine diskrete und abgeschlossene Teilmenge, so ist jede holomorphe Funktion  $f : \mathbb{C} \setminus D \rightarrow \mathbb{E}$  konstant.

c) Es sei  $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ . Die holomorphe Funktion  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  ist auf  $z \mapsto \frac{1}{z}$

$A$  nicht gleichmäßig durch Polynome in  $z$  approximierbar.

**Aufgabe 30:** (F18T2A3)

Seien  $R > \rho > 0$ . Betrachten Sie die Menge

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < R^2, x^2 + y^2 > \rho^2\}.$$

Anschaulich betrachtet ist dies die Menge, die aus einer Kugel mit Radius  $R$  durch „Ausbohren“ eines Zylinders vom Radius  $\rho$  entsteht. Berechnen Sie das Volumen von  $M$ .