# Ernstfalltest zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 1:** (F08T3A3)
Die Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ sei holomorph und es gelte $|f(z)| \geq |e^z|$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Man zeige, daß $f$ in allen Punkten aus $\mathbb{Z}$ holomorph ergänzbar ist und daß $f(z) = Ce^z$ mit einer Konstanten $C$ gilt.

**Aufgabe 2:** (H02T2A1) Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion $f$ auf einer offenen Umgebung um 0 mit der Eigenschaft

$$|f^{(n)}(0)| \geq (n!)^2 \quad \text{für allen} \, n \in \mathbb{N}.$$

b) Es gibt keine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) > 0, \mathrm{Re}\,(z) > 0\}$$

c) Jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\mathrm{Re}\, f(z) = (\mathrm{Im}\, f(z))^2 \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}$$

ist konstant.

**Aufgabe 3:** (H14T2A1) Welche der folgenden Aussagen sind wahr bzw. falsch? Begründen Sie Ihre Antwort:

a) Es sei $f : [0.1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Dann gibt es $t \in ]0,1[$ mit $f'(t) = 1$.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f$ beschränkt.

c) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{R}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

d) Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und nicht konstant, sowie $U \subseteq \mathbb{C}$ offen. Dann ist $f(U)$ offen.

e) Es gibt eine bijektive holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$

f) Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f'(z) = \frac{1}{z}$ für alle $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.