# Übungen zum Staatsexamen: Analysis

**Aufgabe 29:** (H04T1A2) Seien $p$ und $q$ stetige reelle Funktionen und $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$

a) Zeigen Sie, daß durch eine geeignete Transformation jeder positiven Lösung $y$ der nichtlinearen Gleichung

$$y' + p(x)y + q(x)y^\alpha = 0$$

eindeutig eine positive Lösung $z$ der linearen Gleichung

$$z' + (1-\alpha)p(x)z + (1-\alpha)q(x) = 0$$

zugeordnet werden kann.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertproblems

$$y' + y - x\sqrt{y} = 0, \quad y(0) = 0.$$

Ist die von Ihnen gefundene Lösung eindeutig?

**Aufgabe 30:** (F12T3A5)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Man bestimme ein Fundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems $x' = Ax$.

**Aufgabe 31:** (F18T2A5)
Betrachten Sie zu $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u''(x) - 4u(x) + 4u^3(x) &= 0 \\ u(0) &= u_0 \\ u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

a) Finden Sie eine nichtnegative Funktion $G \in C(\mathbb{R})$, so daß

$$L(x) := \frac{1}{2}(u'(x))^2 + G(u(x))$$

konstant in $x$ ist.

b) Zeigen Sie, daß dieses Anfangswertproblem für beliebige $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung $u \in C^2(\mathbb{R})$ hat.

c) Bestimmen Sie stationäre Lösungen der Differentialgleichung. Welche Aussagen zur Stabilität lassen sich allein durch Anwendung des Prinzips der linearen Stabilität treffen?

**Aufgabe 32:** (F18T3A4)

a) Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine schiefsymmetrische Matrix (dh. $B^T = -B$). Zeigen Sie: $x^T Bx = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

b) Seien $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ und $B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$ stetige Abbildungen, so daß $A(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv semidefinit und $B(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ schiefsymmetrisch ist. Zeigen Sie, daß $\begin{array}{rcl} V : \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^T x \end{array}$ eine Lyapunov-Funktion zu

$$\dot{x} = -(A(x) + B(x))x$$

ist, dh. zeigen Sie $\dot{V}(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

c) Auf $\mathbb{R}^2$ sei die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + xy^2 \\ \dot{y} &= -x^2y - 2y \end{aligned}$$

gegeben. Zeigen Sie, daß der Ursprung eine stabile Ruhelage ist.

**Aufgabe 33:** (H09T2A1) Man bestimme alle Gleichgewichtspunkte des ebenen autonomen Systems

$$\begin{aligned} x' &= 2 - xy \\ y' &= \frac{x}{2} - y^3 \end{aligned}$$

und untersuche jeden der Gleichgewichtspunkte auf Stabilität, asymptotische Stabilität bzw. Instabilität.