Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 19: (H03T3A2)

a) Zeigen Sie, daß alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3+z+i}dz$

c) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}\backslash\{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \to \mathbb{C}$ derart, daß $P(z) = e^{h(z)}$ für alle $z \in D$ gilt?

Aufgabe 20: (H01T3A5)
Es seien

$$D_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, \quad D_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}, \quad D_3 = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Für welche $j \in \{1,2,3\}$ gibt es eine auf D_j holomorphe Funktion $f_j : D_j \to \mathbb{C}$ mit $(f_j(z))^3 = z^3 - 1$ für alle $z \in D_j$?

Aufgabe 21: (F18T2A1)

a) Wir betrachten die beiden Gebiete

$$\Omega_1 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x > 0, y > 0\}$$

und

$$\Omega_2 := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \in \mathbb{R}, 0 < y < 1\}$$

(1) Zeigen Sie, daß eine biholomorphe Abbildung $f : \Omega_2 \to \Omega_1$ existiert.

(2) Geben Sie eine solche Abbildung explizit an.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) des Polynpms

$$z^{87} + 36z^{57} + 71z^4 + z^3 - z + 1$$

in dem Kreisring $K_{1,2}(0) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Aufgabe 22: (F03T1A5)
Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die kompaktifizierte komplexe Ebene und sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die durch $f(z) := \frac{z}{z-i}$ gegebene gebrochen-lineare Funktion.

a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f, die Umkehrabbildung f^{-1} und die Bilder bzw. Urbilder von $0, 1, i$ und ∞.

b) Skizzieren Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,(z) \geq 0\}$, der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,(z) \geq 0\}$ und des offenen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter der Abbildung f.

Aufgabe 23: (F09T1A1)
Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{0\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z+1}{2z} \end{array}$.

a) Man bestimme das Bild der Einheitskreislinie unter f.

b) Man bestimme das Bild der punktierten offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ unter f.

Aufgabe 24: (H11T1A2)
Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, es seien $a, b \in \Omega$ mit $a \neq b$ und es seien $f : \Omega \to \Omega$ und $g : \Omega \to \Omega$ biholomorphe Abbildungen mit $f(a) = g(a)$ und $f(b) = g(b)$. Zeigen Sie $f = g$.

Aufgabe 25: (H13T2A1)
Betrachten Sie das Gebiet

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}.$$

Geben Sie eine biholomorphe Abbildung von G auf die Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{E} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$$

an. Hinweis: Bilden Sie zunächst G mit einer Möbiustransformation auf den Streifen $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$ ab und nutzen Sie dann die Exponentialfunktion.

Aufgabe 26: (H13T3A5)
Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und sei $z_0 \in G$. Ist die Menge

$$\{f'(z_0) : f : G \to G \text{ holomorph}, f(z_0) = z_0\}$$

beschränkt? Unterscheiden Sie dabei die Fälle $G = \mathbb{C}$ und $G \neq \mathbb{C}$.

Aufgabe 27: (F18T2A4)
Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \sin(x)\sqrt{1 + 4y(x)}, \quad y(0) = y_0$$

zu Anfangswerten $y_0 \in -\frac{1}{4}, \infty[$.

a) Geben Sie eine möglichst große Menge von Anfangswerten an, für die das Anfangswertproblem lokal eindeutig lösbar ist. Begründen Sie, warum in den entsprechenden Anfangswerten lokale Eindeutigkeit der Lösung vorliegt.

b) Geben Sie für Anfangswerte, für die eindeutige Lösbarkeit nicht gegeben ist, zwei verschiedene Lösungen an.