Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 9: (F12T3A2)
Sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{1,2\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{1}{(z-1)(2-z)} \end{array}$.

a) Bestimmen Sie die Taylorreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

b) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

c) Bestimmen Sie die Laurentreihenentwicklung von f in $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$.

d) Zwei reelle Zahlen $a \neq b$ erfüllen $1 < a, b < 2$. Betrachten Sie die Ellipse $E = \gamma([0, 2\pi])$, wobei $\begin{array}{rcl} \gamma:[0,2\pi] & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & a\cos(t) + ib\sin(t) \end{array}$ ist. Berechnen Sie $\int_\gamma f(z)dz$.

Aufgabe 10: (H14T3A3)
Gegeben sei eine holomorphe Funktion f auf einer Umgebung von $z_0 \in \mathbb{C}$ mit einer Nullstelle der Ordnung $p \in \mathbb{N}$ in z_0 durch die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=p}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

a) Geben Sie eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Laurent-Entwicklung der Funktion $\frac{1}{f}$ um z_0 an.

b) Berechnen Sie den Hauptteil der Laurent-Entwicklung der Funktion $z \mapsto \frac{1}{\sin(z)}$ jeweils um $z_0 = 0$ und $z_0 = \pi$.

c) Sei Γ die Kreislinie $|z - \frac{3}{2}| = 2$ orientiert im positiven Sinn. Berechnen Sie

$$\int_\Gamma \frac{dz}{\sin(z)}$$

Aufgabe 11: (H02T1A1)
Sei f eine holomorphe Funktion auf dem Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \rho\}$ mit $\rho > 0$ und

$$|f(e^{i\theta})| = c \quad \text{für } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Es sei $z = 0$ eine einfache Nullstelle von f und $f(z) \neq 0$ für $z \in G\backslash\{0\}$. Man zeige: Es existiert ein $c_1 \in \mathbb{C}$ mit $|c_1| = c$, so daß $f(z) = c_1 z$ für alle $z \in G$ gilt.

Aufgabe 12: (F11T1A5) Gegeben sei die Funktion $\begin{array}{rcl} g:D & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \dfrac{z}{\sin(z^2-4z)} \end{array}$ mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion g sowie jeweils deren Typ (hebbar? Polstelle wievielter Ordnung? wesentlich?).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den Konvergenzradius der Potenzreihe für g um den Punkt 0. (Diese Formulierung gibt auch einen kleinen Hinweis für (a).)

Aufgabe 13: (F08T1A3)
Es sei $\begin{array}{rcl} f:\mathbb{C}\backslash\{-1,1\} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sin\left(\frac{1}{z^2-1}\right) \end{array}$.

a) Von welchem Typ sind die Singularitäten bei -1 und 1?

b) Es seien $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-1)^j$ und $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} b_j(z+1)^j$ Laurententwicklungen von f. Zeigen Sie

$$b_j = (-1)^j a_j \qquad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}$$

ohne die Koeffizienten zu berechnen.

c) Beweisen Sie $\int\limits_{|z|=2} f(z)dz = 0$.

Aufgabe 14: (H04T3A1) Es seien $f:\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ und $g:\mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$ zwei verschiedene holomorphe Funktionen und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, daß f oder g dann eine wesentliche Singularität im Nullpunkt hat.

Aufgabe 15: (F09T3A5)
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und injektiv. Zeigen Sie, daß f eine nicht konstante affine Funktion ist, dh es gibt $a, b \in \mathbb{C}$ mit $a \neq 0$ und $f(z) = az + b$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
Hinweis: Untersuchen Sie die Art der Singularität von f in ∞.

Aufgabe 16: (F00T2A2) Berechnen Sie das Integral

$$\int\limits_\gamma \frac{1}{1-z} e^{\frac{1}{z}} dz$$

für einen einfach geschlossenen, positiv orientierten Weg γ, der die Punkte 0 und 1 umschließt.

Aufgabe 17: (F07T1A5) Es sei $f := \dfrac{p}{q}$ eine rationale Funktion und es sei der Grad des Nennerpolynoms q um 2 größer als der Grad des Zählerpolynoms p. Zeigen Sie, daß die Summe der Residuen von f verschwindet, dh.

$$\sum_{a\in\mathbb{C}} \mathrm{Res}(f, a) = 0.$$

Aufgabe 18: (F08T2A4) Berechnen Sie die Integrale

a) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{2+\cos(3\theta)}{2+\cos(\theta)} d\theta$

b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$