Übungen zum Staatsexamen: Analysis

Aufgabe 1: (H02T3A1) Die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ werde mit der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ vermöge der Zuordnung $(x, y) \mapsto z := x + iy$ identifiziert.

a) Sei $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $u(x, y) := x^2 - y^2$. Man zeige: Es gibt eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}\,(f) = u$.

b) Gibt es eine Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $u_1(x, y) := \sin(x) + \varphi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist? Falls ja, gebe man ein solches g explizit an.

c) Gibt es eine stetige Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die nicht identisch verschwindet, so daß $u_2(x, y) := \sin(x)\psi(y)$ Realteil einer holomorphen Funktion $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist?. Falls ja, gebe man ein solches h explizit an.

Aufgabe 2: (F08T2A3)

a) Es sei $a > 0$. Untersuchen Sie, ob es eine in $B_{1+a}(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + a\}$ holomorphe Funktion f gibt, für die für ein festes $k \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$|f^{(n)}(0)| > \frac{n!}{n^k}$$

gilt.

b) Es sei f holomorph auf $B_1(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ und für alle $z \in B_1(0)$ gelte $|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}$. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $r \in]0, 1[$ gilt:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{n!}{r^n(1-r)}$$

und folgern Sie

$$|f^{(n)}(0)| < e(n+1)!$$

Aufgabe 3: (H06T1A4) Zeigen Sie:

a) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{|h(z)|}{|z|^{n+1}} = 0,$$

so ist h eine komplexe Polynomfunktion vom Grad $\leq n$.

b) Ist $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathrm{Re}\,(h)$ beschränkt, so ist h konstant.

Aufgabe 4: (H06T2A4)
Bestimmen Sie alle auf ganz $\mathbb{C}$ definierten holomorphen Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, welche $|f(z)| \leq |\sin(z)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllen.

Aufgabe 5: (H13T3A4) Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ eine stetige und nichtkonstante Funktion.

a) Die Einschränkung $f|_G$ von f auf G sei holomorph.

   i) Zeigen Sie, $\partial(f(G)) \subseteq f(\partial G)$. (Dabei bezeichnet $\partial A := \overline{A} \backslash \mathring{A}$ den Rand einer Menge $A \subseteq \mathbb{C}$.)

   ii) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $\partial(f(G)) \subsetneq f(\partial G)$.

b) Geben Sie ein Beispiel für ein derartiges G und f an mit $f|_G$ unendlich oft reell differenzierbar und $\partial(f(G)) \not\subseteq f(\partial G)$.

Aufgabe 6: (H17T3A5) Sei $\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \end{aligned}$ holomorph.

a) Stellen Sie für $k \in \mathbb{N}_0$ und $r > 0$ die Koeffizienten a_k der obigen Potenzreihe durch ein Wegintegral über $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ dar. Folgern Sie daraus

$$|a_k| \leq r^{-k} \max\{|f(z)| : |z| = r\}$$

b) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte zusätzlich $\limsup_{|z| \to \infty} |z|^{-n}|f(z)| < \infty$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\leq n$ ist.

c) Für ein $n \in \mathbb{N}_0$ gelte nun zusätzlich $\liminf_{|z| \to \infty} |z|^{-n}|f(z)| > 0$. Zeigen Sie, daß f ein Polynom vom Grad $\geq n$ ist.

Aufgabe 7: (F14T2A3) Berechnen Sie für $\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto 2e^{2it} \end{aligned}$ und $\begin{aligned} \eta : [0, 2\pi] &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto i + e^{-it} \end{aligned}$ die Kurvenintegrale:

a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz^2} - 1}{z^2} dz$

b) $\displaystyle\int_\eta \frac{e^z}{(z - i)^3} dz$

c) $\displaystyle\int_\gamma e^{\frac{1}{z}} dz.$

Aufgabe 8: (F14T1A5) Berechnen Sie unter Benutzung von $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ für $\lambda > 0$ das Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(\lambda x) dx.$$

Hinweis: Wenden Sie für reelles $R > 0$ den Cauchy-Integralsatz auf das Rechteck mit den Ecken $\pm R$, $\pm R + i\frac{\lambda}{2}$ an und betrachten Sie $R \to \infty$.

Aufgabe 12: (H06T2A2)
Drei Fragen zur Funktionentheorie:

a) Hat jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion?

b) Wo konvergiert die Laurentreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n$?

c) Nimmt die komplexe Sinusfunktion jeden Wert an?

Aufgabe 36: (H00T1A5) Entscheiden Sie, ob die nachstehenden Aussagen jeweils wahr oder falsch sind und geben Sie in jedem der Fälle eine kurze Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel).

a) Die komplexe Sinusfunktion $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ hat die gleichen Nullstellen wie ihre Einschränkung auf die reelle Achse.

b) Für den einmal im positiven Sinne durchlaufenen Einheitskreis S_1^+ gilt:

$$\int_{S_1^+} \frac{e^z - 1}{z} dz = 2\pi i.$$

c) Genügt eine ganze Funktion f der Bezeihung $|f(z)| \leq |e^z|$, so gilt $f(z) = ce^z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit einem $c \in \mathbb{C}$.