3 Integration banachraumwertiger Funktionen

Definition 3.1. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum und Y ein Banachraum. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt* μ-**einfach**, *wenn*

- *$f(X)$ eine endliche Menge ist.*
- *Für jedes $y \in Y$ ist $f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$.*
- *$\mu(f^{-1}(Y \backslash \{\mathbf{0}\})) < \infty$.*

$$\mathcal{EF}(X, \mu, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ ist } \mu\text{-einfach }\}$$

bezeichne die Menge aller μ-einfachen Funktionen. $f : X \to Y$ heißt μ-**meßbar**, *wenn es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ gibt, so daß $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ gilt.*

$$\mathcal{L}_0(X, \mu, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ ist } \mu\text{-meßbar}\}$$

$f : X \to Y$ heißt μ-**fast separabelwertig**, *wenn es eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ gibt, so daß $f(X\backslash N) \subseteq Y$ separabel ist (dh. daß es eine abzählbare, dichte Teilmenge von $f(X\backslash N)$ gibt.)*

Satz 3.2. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum, Y ein Banachraum und $f : X \to Y$ eine Abbildung, dann sind äquivalent:*

a) $f : X \to Y$ ist μ-meßbar

b) $f : X \to Y$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}(Y)$-meßbar und μ-fast separabelwertig.

Beweis.

a)⇒b) Es sei $f : X \to Y$ μ-meßbar, dann gibt es nach Definition eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ und eine Folge $g_n : X \to Y$ in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ für alle $x \in X\backslash N$.

- $W := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n(X)$ ist als abzählbare Vereinigung endlicher Mengen eine abzählbare Teilmenge von Y und wegen $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ für alle $x \in X\backslash N$ ist $f(X\backslash N) \subseteq \overline{W}$ in der separablen Teilmenge $\overline{W}$ von Y enthalten.
- Es sei $U \subseteq Y$ offen und für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$U_n := \{y \in U : \operatorname{dist}(y, Y\backslash U) > \frac{1}{n}\} = (\operatorname{dist}(\cdot, Y\backslash U))^{-1}(]\frac{1}{n}, \infty[),$$

dann ist U_n als Urbild des offenen Intervalls $]\frac{1}{n}, \infty[$ bei der gleichmäßig stetigen Abbildung $\operatorname{dist}(\cdot, Y\backslash U)$ wieder offen. Es ist $\overline{U_n} \subseteq U$, denn für $y \in \overline{U_n}$ gibt es eine Folge $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in U_n mit $y = \lim\limits_{k\to\infty} y_k$, dh. $\operatorname{dist}(y, Y\backslash U) \geq \frac{1}{n}$ und somit ist

$y \in U = \{w \in Y : \operatorname{dist}(w, Y \backslash U) > 0\}$, denn da $Y \backslash U$ abgeschlossen ist, ist $w \in Y \backslash U$ äquivalent zu $\operatorname{dist}(w, Y \backslash U) = 0$. Dies zeigt außerdem

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$$

und wegen $U_1 \subseteq U_2 \subseteq ...$ ist für $x \in X \backslash N$ und $f(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ genau dann $f(x) \in U$, wenn es $N = N(x), M = M(N(x)) \in \mathbb{N}$ gibt mit $g_k(x) \in U_N$ für alle $k \geq M$, woraus

$$f^{-1}(U) \cap (X \backslash N) = \bigcup_{m,n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq m} g_j^{-1}(U_n) \cap (X \backslash N) \tag{3.1}$$

folgt. Da g_j eine μ-einfache Funktion ist, gilt

$$g_j^{-1}(U_n) = g_j^{-1}(U_n \cap g_j(X)) = \bigcup_{y \in U_n \cap g_j(X)} g_j^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{A}$$

als endliche Vereinigung meßbarer Mengen. Da X vollständig ist, sind N, $X \backslash N \in \mathcal{A}$ und damit $g_j^{-1}(U_n) \cap (X \backslash N) \in \mathcal{A}$, also nach (3.1) auch $f^{-1}(U) \cap (X \backslash N) \in \mathcal{A}$. $f^{-1}(U) \cap N \subseteq N$ und da $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vollständig ist, gilt $f^{-1}(U) \cap N \in \mathcal{A}$, also $f^{-1}(U) = (f^{-1}(U) \cap N) \cup (f^{-1}(U) \cap (X \backslash N)) \in \mathcal{A}$, dh. $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für jedes $U \in \mathcal{O}_Y$ und da $\mathcal{O}_Y$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}(Y)$ ist, ist f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(Y)$-meßbar.

b)$\Rightarrow$a) Es sei f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(Y)$-meßbar und μ-fast separabelwertig.

- Es sei $\mu(X) < \infty$, $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ und $f(X \backslash N)$ sei separabel. $\{y_k : k \in \mathbb{N}\}$ sei eine abzählbare, dichte Teilmenge von $f(X \backslash N)$, dann ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$f(X \backslash N) \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} K(y_k, \frac{1}{n}) \quad \text{und} \quad X = N \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} f^{-1}(K(y_k, \frac{1}{n})).$$

Da f meßbar ist, gilt

$$X_{k,n} := f^{-1}\left(K\left(y_k, \frac{1}{n}\right)\right) \in \mathcal{A}$$

für alle $(k, n) \in \mathbb{N}^2$. Da μ σ-stetig von unten ist und $\mu(X) < \infty$ vorausgesetzt ist, gibt es $M = M(n) \in \mathbb{N}$, so daß für $Z_n := \bigcup_{k=1}^{M(n)} X_{k,n}$ gilt $\mu(X \backslash Z_n) < 2^{-(n+1)}$.

Durch

$$\begin{aligned} W_{1,n} &:= X_{1,n} \\ &\vdots \qquad \vdots \\ W_{k,n} &:= X_{k,n} \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} X_{j,n}\right) \end{aligned}$$

ist eine Folge $(W_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ von meßbaren, paarweise disjunkten Mengen gegeben und

$$\begin{aligned}\varphi_n : X &\to Y\\ x &\mapsto \begin{cases} y_k & \text{für } x \in W_{k,n}, 1 \le k \le M(n)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}\end{aligned}$$

definiert eine Folge von μ-einfachen Funktionen mit $\|\varphi_n(x) - f(x)\| \le \frac{1}{n}$ für alle $x \in Z_n$. Die Folge $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $V_n := \bigcup_{k=n}^{\infty} Z_k$ ist absteigend mit

$$\mu(V_n) \le \sum_{k=n}^{\infty} \mu(Z_k) \le 2^{-n}$$

und daher ist $V := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ wegen der σ-Stetigkeit von μ von oben eine μ-Nullmenge. $\psi_n := \mathbf{1}_{X\setminus V_n}\varphi_n$ definiert eine Folge von μ-einfachen Funktionen. Für $x \in X\setminus V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X\setminus V_n)$ gibt es wegen $X\setminus V_1 \supseteq X\setminus V_2 \supseteq ...$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $x \in X\setminus V_n$ für alle $n \ge m$ und daher ist

$$\|\psi_n(x) - f(x)\| = \|\varphi_n(x) - f(x)\| \le \frac{1}{n}$$

dh. $f(x) = \lim_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für alle $x \in X\setminus W$, also f μ-meßbar im Fall $\mu(X) < \infty$.

- Im Fall $\mu(X) = \infty$ wähle eine Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ von paarweise disjunkten Mengen mit $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ und $\mu(X_j) < \infty$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Der letzte Fall angewandt auf $(X_j, \mathcal{A}_j := \mathcal{A} \cap X_j, \mu_j := \mu|_{\mathcal{A}_j})$ zeigt, daß es zu jedem $j \in \mathbb{N}$ eine Folge $(\varphi_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X_j, \mu_j, Y)$ und eine Nullmenge $N_j \subseteq X_j$ gibt, mit $f(x) = \lim_{k\to\infty} \varphi_{j,k}(x)$ für jedes $x \in X_j\setminus N_j$. $N := \bigcup_{j\in\mathbb{N}} N_j \in \mathcal{A}$ ist wegen $0 \le \mu(N) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(N_j) = 0$ eine μ-Nullmenge und daher ist f μ-meßbar. □

Korollar 3.3. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum, Y ein separabler Banachraum, dann sind äquivalent:*

a) $f : X \to Y$ ist μ-meßbar.

b) $f : X \to Y$ ist $\mathcal{A} - \mathcal{B}(Y)$-meßbar.

Definition 3.4. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum und $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum, dann heißt $f : X \to \mathcal{H}$*

- **stark meßbar**, *wenn f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(Y)$-meßbar ist.*
- **schwach meßbar**, *wenn für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ die Funktion $\begin{array}{rcl} f_\psi : X & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \langle f(x), \psi\rangle \end{array}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-meßbar ist.*

Satz 3.5. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum, $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum, dann sind für $f : X \to \mathcal{H}$ äquivalent:*

a) f ist μ-meßbar.

b) f ist stark meßbar.

c) f ist schwach meßbar.

Beweis. Da $\mathcal{H}$ separabel ist, folgt die Äquivalenz von a) und b) aus Satz 3.2.

b)⇒c) Es sei $f : X \to \mathcal{H}$ $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathcal{H})$-meßbar. Da die Abbildung $\begin{array}{rcl} \langle\cdot,\psi\rangle : \mathcal{H} & \to & \mathbb{K} \\ \phi & \mapsto & \langle\phi,\psi\rangle \end{array}$ für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ stetig, also $\mathcal{B}(\mathcal{H}) - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-meßbar ist, ist

$$f_\psi = \langle\cdot,\psi\rangle \circ f : \begin{array}{rcccl} X & \to & \mathcal{H} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & \langle f(x), \psi\rangle \end{array}$$

als Verknüpfung von meßbaren Funktionen $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{K})$-meßbar, dh. f ist schwach meßbar.

c)⇒a) Da $\mathcal{H}$ separabel ist, gilt das auch für die abgeschlossene Einheitskugel $\overline{K}(0,1) = \{\Psi \in \mathcal{H} : \|\Psi\| \le 1\}$ in $\mathcal{H}$. Es sei also $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{K}(0,1)$ mit

$$\overline{\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}} \supseteq \overline{K}(0,1).$$

Da für jedes $\Psi \in \mathcal{H}$ die Norm durch $\|\Psi\| := \sup_{\|\phi\|\le 1} |\langle\Psi,\phi\rangle|$ gegeben ist und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ stetig ist, gilt sogar

$$\|\Psi\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\langle\Psi,\varphi_n\rangle|, \tag{3.2}$$

denn wir dürfen oE. $\Psi \ne 0$ annehmen und wählen dann zu $\varepsilon > 0$ ein $\phi \in \overline{K}(0,1)$ mit $|\|\Psi\| - \langle\Psi,\phi\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}$ und da $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht in $\overline{K}(0,1)$ ist, gibt es $m \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi_m - \phi\| < \frac{\varepsilon}{2\|\Psi\|}$. Damit ist

$$\Big|\|\Psi\| - \langle\Psi,\varphi_m\rangle\Big| \le \Big|\|\Psi\| - \langle\Psi,\phi\rangle\Big| + \Big|\langle\Psi,\phi-\varphi_m\rangle\Big| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

was (3.2) zeigt. Aus (3.2) folgt

$$\{x \in X : \|f(x)\| \le \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Big\{x \in X : \Big|\langle f(x),\varphi_n\rangle\Big| \le \alpha\Big\} \tag{3.3}$$

also ist $\begin{array}{rcl} \|f\| : X & \to & [0,\infty] \\ x & \mapsto & \|f(x)\| \end{array}$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}([0,\infty])$-meßbar. Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge in $\mathcal{H}$, dann ist

$$\mathcal{H} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{\Psi \in \mathcal{H} : \|\Psi - \varphi_k\| < \frac{1}{m}\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} K(\varphi_k, \frac{1}{m})$$

Da $\|f\|$ meßbar ist, sind

$$X_{k,m} := \{x \in X : f(x) \in K(\varphi_k, \frac{1}{m})\} = \|f - \varphi_k\|^{-1}([0, \frac{1}{m}[) \in \mathcal{A}$$

und $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_{k,m}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Dann sind die induktiv definierten Mengen

$$\begin{array}{rcl} Z_{1,m} & := & X_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{k,m} & := & X_{k,m} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} Z_{j,m} \right) \in \mathcal{A} \end{array}$$

paarweise disjunkt mit

$$X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z_{k,m}. \tag{3.4}$$

- 1. Fall: $\mu(X) < \infty$. Dann gibt es für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $M = M(m) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mu \left(X \setminus \bigcup_{k=1}^{M(m)} Z_{k,m} \right) < 2^{-m-1}. \tag{3.5}$$

  Dann definiert

$$\begin{array}{rcl} f_m : X & \to & \mathcal{H} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi_k & \text{falls } x \in Z_{k,m} \text{ für } k \in \{1, ..., M(m)\} \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus \bigcup_{k=1}^{M(m)} Z_{k,m} \end{cases} \end{array}$$

  eine Folge von μ-einfachen Funktionen mit $\|f_m(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{m}$ für $x \in \bigcup_{k=1}^{M(m)} Z_{k,m}$, was wegen (3.5) die punktweise Konvergenz $f_m(x) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ für μ-fast alle $x \in X$ zeigt. Damit ist f $\mu-$meßbar.

- 2. Fall: $\mu(X) = \infty$. Da X σ-endlich ist, gibt es eine Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathcal{A}$ mit $X = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} X_j$ und $\mu(X_j) < \infty$. Wende nun Fall 1 auf $(X_j, \mathcal{A}_j := \mathcal{A} \cap X_j, \mu_j := \mu|_{\mathcal{A}_j})$ an, dann zeigt Fall 1, daß es eine Folge

$(f_{m,j})_{m\in\mathbb{N}}$ von μ_j- einfachen Funktionen mit $f_{m,j}(x) \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} f|_{X_j}(x)$ für μ_j-fast alle $x \in X_j$.

$$\begin{aligned} g_n : X &\to \mathcal{H} \\ x &\mapsto \begin{cases} f_{n,j}(x) & \text{falls } x \in \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j \\ 0 & \text{falls } x \in X \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j \end{cases} \end{aligned}$$

definiert eine Folge von $\mu-$einfachen Funktionen mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$, dh. f ist $\mu-$meßbar.

□

Wie bei der Integraldefinition für nichtnegative Stufenfunktionen zeigt man auch für $\mu-$einfache Funktionen, daß die folgende Definition eines Integrals nicht von der Schreibweise der einfachen Funktion als Linearkombination von charakteristischen Funktionen abhängt:

Definition 3.6. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum, Y ein Banachraum und $f = \sum\limits_{k=1}^{n} y_k \mathbf{1}_{A_k} \in \mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $y_1, ..., y_n \in Y$ und $A_1, ..., A_n \in \mathcal{A}$ eine $\mu-$einfache Funktion, dann heißt*

$$\int\limits_X f d\mu := \sum_{k=1}^{n} y_k \mu(A_k) \tag{3.6}$$

das **Integral** *von f.*

Lemma 3.7. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum, Y ein Banachraum, dann gilt:*

a) $$\begin{aligned} \int\limits_X \cdot\, d\mu : \mathcal{EF}(X, \mu, Y) &\to Y \qquad \textit{ist linear.} \\ f &\mapsto \int\limits_X f d\mu \end{aligned}$$

b) Für $f \in \mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ ist

$$\left\| \int\limits_X f d\mu \right\| \leq \int\limits_X \|f\| d\mu \tag{3.7}$$

Bemerkung 3.8.

- Auf $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ wird durch

$$\|\phi\|_{\mathcal{EF}} := \int\limits_X \|\phi(x)\| d\mu(x)$$

eine Halbnorm definiert, aber wenn es in $\mathcal{A}$ eine $\mu-$Nullmenge $N \neq \emptyset$ gibt, dann ist $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}$ keine Norm, denn $\|\mathbf{1}_N\|_{\mathcal{EF}} = 0$, aber $\mathbf{1}_N \neq 0$.

- Auch eine Halbnorm $\|\cdot\| : V \to [0,\infty[$ auf einem Vektorraum macht V durch

$$\mathcal{O}_V := \{U \subseteq V : \text{Für jedes } x \in U \text{ gibt es } r = r(x) > 0 \text{ mit } \{v \in V : \|x - v\| < r\} \subseteq U\}$$

zu einem topologischen Raum. Ist aber $\|\cdot\|$ keine Norm, dann ist $(V, \mathcal{O}_V)$ iA. nicht hausdorffsch, zB. wenn $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $x \in X$, $\{x\} \in \mathcal{A}$ mit $\mu(\{x\}) = 0$ ist, dann ist $0 \neq \mathbf{1}_{\{x\}}$ aber $\|0 - \mathbf{1}_{\{x\}}\|_{\mathcal{EF}} = 0$, dh. in jeder Umgebung von 0 bzgl. $\mathcal{O}_{\mathcal{EF}}$ ist auch $\mathbf{1}_{\{x\}}$ enthalten. Insbesondere brauchen Grenzwerte von **Cauchyfolgen** – und die sind genauso definiert wie bei einer Norm – bei einer Halbnorm nicht eindeutig sein.

Lemma 3.9. *Es sei $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $\|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{EF}} \stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (Sprechweise: $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$**Cauchyfolge**). Dann gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und eine μ-meßbare Funkition $f : X \to Y$ mit:*

a) $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{j_k}(x) = f(x)$ *für $\mu-$fast alle $x \in X$.*

b) Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon$, so daß $(\varphi_{j_k} - f)|_{X\setminus A_\varepsilon}$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert.

Beweis. Da $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge ist, gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $j_k \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi_m - \varphi_l\|_{\mathcal{EF}} < 2^{-2k}$ für alle $l, m \geq j_k$. Wir können somit $(j_k)_{k\in\mathbb{N}}$ oE. monoton wachsend wählen und definieren $\Psi_k := \varphi_{j_k}$. Dann gilt nach Konstruktion

$$\|\Psi_l - \Psi_m\|_{\mathcal{EF}} < 2^{-2l} \qquad \text{für alle } 1 \leq l \leq m$$

Für $l \in \mathbb{N}$ definiere

$$B_l := \{x \in X : \|\Psi_{l+1}(x) - \Psi_l(x)\| \geq 2^{-l}\} = \|\Psi_{l+1} - \Psi_l\|^{-1}([2^{-l}, \infty[) \in \mathcal{A}$$

und da auch $\Psi_{l+1} - \Psi_l \in \mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ sind und $B_l \subseteq (\Psi_{l+1} - \Psi_l)^{-1}(Y\setminus\{\mathbf{0}\})$ gilt, folgt

$$\mu(B_l) \leq \mu((\Psi_{l+1} - \Psi_l)^{-1}(Y\setminus\{\mathbf{0}\})) < \infty,$$

insbesondere gilt nach Definition von B_l und der Tschebyscheff-Ungleichung

$$2^{-l}\mu(B_l) = 2^{-l}\mu(\{x \in X : \|(\Psi_{l+1} - \Psi_l)(x)\| \geq 2^{-l}\}) \leq \int\limits_x \|\Psi_{l+1} - \Psi_l\| d\mu < 2^{-2l}$$

dh. $\mu(B_l) < 2^{-l}$ für jedes $l \in \mathbb{N}$. Definiere

$$A_n := \bigcup_{k=0}^{\infty} B_{n+k}$$

dann gilt

$$\mu(A_n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mu(B_{n+k}) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-(n+k)} = 2^{-n+1}$$

wegen der σ-Subadditivität von μ. $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und so gilt $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$ für $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ aufgrund der σ-Stetigkeit von μ von unten. Für $x \in X\backslash A_n = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}_0} (X\backslash B_{n+k})$ gilt $\|(\Psi_{l+1}-\Psi_l)(x)\| < 2^{-l}$ für alle $l \geq n$, dh. die Reihe $(\Psi_1(x)+\sum\limits_{l=1}^{n}(\Psi_{l+1}(x)-\Psi_l(x)))_{n\in\mathbb{N}} = (\Psi_{n+1}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzgl. $\|\cdot\|$ gleichmäßig auf $X\backslash A_n$. Definiere

$$\begin{aligned} f : X &\to Y \\ x &\mapsto \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \Psi_k(x) & \text{für } x \in X\backslash A \\ 0 & \text{für } x \in A \end{cases} \end{aligned}$$

dann ist $\lim\limits_{k\to\infty} \Psi_k(x) = f(x)$ für $x \in X\backslash A$, dh. $(\varphi_{j_k})_{k\to\infty}$ konvergiert punktweise μ-fast überall gegen f. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_n) = 2^{-n+1} < \varepsilon$, dann konvergiert $(\varphi_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$ auf $X\backslash A_n$ gleichmäßig gegen f. $\square$

Lemma 3.10. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum und Y ein Banachraum. Sind $(\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolgen und gilt*

$$\lim_{j\to\infty} \varphi_j(x) = \lim_{j\to\infty} \psi_j(x) = f(x)$$

für $\mu-$fast alle $x \in X$, dann ist $\lim\limits_{j\to\infty} \|\psi_j - \varphi_j\|_{\mathcal{EF}} = 0$.

Beweis. Die Folge $f_n := \varphi_n - \psi_n \in \mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ ist wegen

$$\|f_n - f_m\|_{\mathcal{EF}} \leq \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{EF}} + \|\psi_n - \psi_m\|_{\mathcal{EF}}$$

wieder eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_{\mathcal{EF}} < \frac{\varepsilon}{8}$ für alle $m, n \geq N(\varepsilon)$. Da f_N eine $\mu-$einfache Funktion ist, gilt

$$A := \{x \in X : f_N(x) \neq 0\} = f_N^{-1}(Y\backslash\{\mathbf{0}\}) \in \mathcal{A}$$

und $\mu(A) < \infty$ und $\|f_N\|_\infty := \sup\{\|f_N(x)\| : x \in X\} < \infty$. Nach Voraussetzung gilt ferner $0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Lemma 3.9 zeigt, daß es $B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(B) < \dfrac{\varepsilon}{8(1 + \|f_N\|_\infty)}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die auf $X\backslash B$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert. Es gibt also insbesondere ein $K \geq N$ mit

$$\|f_{n_K}(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{8(1 + \mu(A))}$$

für alle $x \in (X\backslash B) \cap A$, also ist

$$\int\limits_{(X\backslash B)\cap A} \|f_{n_K}\| d\mu \leq \frac{\varepsilon}{8(1 + \mu(A))}\mu((X\backslash B) \cap A) \leq \frac{\varepsilon}{8}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_B \|f_{n_K}\|d\mu &\le \int_B \|f_{n_K} - f_N\|d\mu + \int_B \|f_N\|d\mu \le \|f_{n_K} - f_N\|_{\mathcal{EF}} + \|f_N\|_\infty \mu(B) < \frac{\varepsilon}{4} \\ \int_{X\setminus A} \|f_{n_K}\|d\mu &= \int_{X\setminus A} \|f_{n_K} - f_N\|d\mu \le \|f_{n_K} - f_N\|_{\mathcal{EF}} < \frac{\varepsilon}{8}\end{aligned}$$

und wegen $X = (X\setminus A) \cup ((X\setminus B) \cap A) \cup B$ ist

$$\|f_{n_K}\|_{\mathcal{EF}} = \int_X \|f_{n_K}\|d\mu \le \int_{X\setminus A} \|f_{n_K}\|d\mu + \int_{(X\setminus B)\cap A} \|f_{n_K}\|d\mu + \int_B \|f_{n_K}\|d\mu \le \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit $\|f_n\|_{\mathcal{EF}} \le \|f_{n_K}\|_{\mathcal{EF}} + \|f_n - f_{n_K}\|_{\mathcal{EF}} < \varepsilon$ für $n \ge N(\varepsilon)$, dh. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|_{\mathcal{EF}} = 0$. □

Korollar 3.11. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum und Y ein Banachraum. Sind $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolgen in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$, dann konvergieren die Folgen $\left(\int_X \varphi_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\int_X \psi_n d\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ in Y und es gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n d\mu. \tag{3.8}$$

Definition 3.12. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum, Y ein Banachraum, dann heißt $f : X \to Y$ $\mu-$***(Bochner-)integrierbar***, wenn es eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}$-Cauchyfolge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ gibt mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. In diesem Fall ist nach Korollar 3.11*

$$\int_X f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu \in Y \tag{3.9}$$

wohldefiniert und heißt das **(Bochner-$\mu-$)Integral** *von f. Schreibweise:*

$$\mathcal{L}^1(X, \mu, Y) := \{f : X \to Y : f \text{ ist } \mu\text{−integrierbar}\} \tag{3.10}$$

Satz 3.13. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum, Y ein Banachraum und $f : X \to Y$ sei $\mu-$meßbar. Dann sind äquivalent:*

a) f ist (Bochner-μ-)integrierbar

b) $\|f\| \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, \infty])$.

Beweis.

a)⇒b) Nach Satz 3.2 ist f $\mathcal{A}-\mathcal{B}(Y)-$meßbar, also $\|f\|$ $\mathcal{A}-\mathcal{B}([0,\infty])-$meßbar, dh. $\int\limits_X \|f\| d\mu \in [0,\infty]$ ist als Integral einer nichtnegativen meßbaren Funktion definiert. Es sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Die umgekehrte Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}$ ergibt

$$\Big| \|f_l\|_{\mathcal{EF}} - \|f_m\|_{\mathcal{EF}} \Big| \leq \|f_l - f_m\|_{\mathcal{EF}},$$

daher ist $(\|f_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X,\mu,\mathbb{R})$ mit $\|f(x)\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n(x)\|$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Daher ist $\|f\| \in \mathcal{L}^1(X,\mu,\mathbb{R})$ $\mu-$integrierbar mit

$$\int\limits_X \|f(x)\| d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \|f_n(x)\| d\mu(x) \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

b)⇒a) Da f $\mu-$meßbar ist, gibt es eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Definiere damit $g_n(x) := \begin{cases} f_n(x) & \text{falls } \|f_n(x)\| \leq 2\|f(x)\| \\ 0 & \text{falls } \|f_n(x)\| > 2\|f(x)\| \end{cases}$ dh. $g_n = f_n \mathbf{1}_{\{2\|f\| - \|f_n\| \geq 0\}}$ ist wieder eine $\mu-$einfache Funktion mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Da nach Voraussetzung $\int\limits_X \|f\| d\mu < \infty$ ist, ist $2\|f\|$ eine integrierbare Majorante für die Folge $(\|g_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehungsweise $4\|f\|$ eine integrierbare Majorante für die Folge $(\|g_n - g_m\|)_{m,n\in\mathbb{N}}$. Wegen

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \overset{m,n\to 0}{\longrightarrow} 0$$

für $\mu-$fast alle $x \in X$ folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\int\limits_X \|g_n(x) - g_m(x)\| d\mu(x) = \|g_n - g_m\|_{\mathcal{EF}} \overset{m,n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

dh. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$, also ist f (Bochner-)$\mu-$integrierbar. □

Bemerkung 3.14.

- $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ ist ein Vektorraum, denn zu $f, g \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ gibt es $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ und $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Dann ist auch $(\varphi_n + \alpha\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) + \alpha g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (\varphi_n(x) + \alpha\psi_n(x))$ für $\mu-$fast alle $x \in X$ und damit ist $f + \alpha g \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$.

- Auf $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ definiert
$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} := \int\limits_X \|f\| d\mu \tag{3.12}$$
eine Halbnorm, denn zu $f, g \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ wähle $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolgen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ und $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$, dann gilt:
  - Wegen (3.11) ist
$$\|f\|_{\mathcal{L}^1} = \int\limits_X \|f(x)\| d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X \|\psi_n\| d\mu = \lim_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{\mathcal{EF}} \geq 0.$$
  - Für $\alpha \in \mathbb{K}$ ist $\|\alpha f\|_{\mathcal{L}^1} = \lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha\psi_n\|_{\mathcal{EF}} = |\alpha| \lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n\|_{\mathcal{EF}} = |\alpha|\|f\|_{\mathcal{L}^1}$
  - $\|f+g\|_{\mathcal{L}^1} = \lim\limits_{n\to\infty} \|\psi_n + \varphi_n\|_{\mathcal{EF}} \leq \lim\limits_{n\to\infty} (\|\psi_n\|_{\mathcal{EF}} + \|\varphi_n\|_{\mathcal{EF}}) = \|f\|_{\mathcal{L}^1} + \|g\|_{\mathcal{L}^1}$

Satz 3.15. *Es sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum und Y ein Banachraum, dann gilt:*

a)
$$\begin{aligned} \int\limits_X \cdot\, d\mu : \mathcal{L}^1(X,\mu,Y) &\to Y \\ f &\mapsto \int\limits_X f d\mu \end{aligned}$$
ist linear und stetig und es gilt:
$$\left\| \int\limits_X f d\mu \right\| \leq \int\limits_X \|f\| d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1} \tag{3.13}$$

b) Ist Z ein Banachraum, $T \in L(Y,Z)$, dann ist für jedes $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ auch $Tf \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Z)$ und es gilt:
$$T\left[\int\limits_X f d\mu\right] = \int\limits_X T[f(x)] d\mu(x). \tag{3.14}$$

Beweis.

a) Nach Bemerkung 3.14 ist $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ ein Vektorraum. Sind $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolgen in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ und $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(x)$ für fast alle $x \in X$. Dann gilt nach den Eigenschaften des Integrals von $\mu-$einfachen Funktionen:
$$\int\limits_X (\varphi_n + \alpha\psi_n) d\mu = \int\limits_X \varphi_n d\mu + \alpha \int\limits_X \psi_n d\mu$$

und da $(\varphi_n + \alpha\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge mit $f(x) + \alpha g(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n(x) + \alpha\psi_n(x))$ für $\mu-$fast alle $x \in X$ ist, folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_X (f+\alpha g)d\mu &= \lim_{n\to\infty}(\varphi_n + \alpha\psi_n)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n d\mu + \alpha \lim_{n\to\infty}\int\limits_X \psi_n d\mu \\ &= \int\limits_X f d\mu + \alpha \int\limits_X g d\mu\end{aligned}$$

Nach Lemma 3.7 ist $\left\|\int\limits_X \varphi_n d\mu\right\| \le \int\limits_X \|\varphi_n\| d\mu = \|\varphi_n\|_{\mathcal{EF}}$ und wegen (3.11) ist $\int\limits_X \|f(x)\| d\mu(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X \|\varphi_n(x)\| d\mu(x)$ daher folgt aus der Stetigkeit der Norm auf Y und wegen $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n d\mu$ gilt:

$$\begin{aligned}\left\|\int\limits_X f d\mu\right\| &= \left\|\lim_{n\to\infty}\int\limits_X \varphi_n d\mu\right\| = \lim_{n\to\infty}\left\|\int\limits_X \varphi_n d\mu\right\| \le \lim_{n\to\infty}\int\limits_X \|\varphi_n\| d\mu \\ &= \int\limits_X \|f\| d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1}\end{aligned}$$

und daher ist $\int\limits_X \cdot d\mu$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}-$Halbnorm und der $\|\cdot\|-$Norm auf Y.

b) Zu $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ wähle eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Da $T \in L(Y,Z)$ stetig ist, folgt $T[f(x)] = \lim\limits_{n\to\infty} T[\varphi_n(x)]$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Wegen

$$\{x \in X : T[\varphi_n(x)] = \mathbf{0}\} \supseteq \{x \in X : \varphi_n(x) = \mathbf{0}\}$$

ist $\mu((T\circ\varphi_n)^{-1}(Z\backslash\{\mathbf{0}\})) \le \mu(\varphi_n^{-1}(Y\backslash\{\mathbf{0}\})) < \infty$, also $(T\circ\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $(T\circ f)(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(T\circ\varphi_n)(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$, dh $T\circ f$ ist $\mu-$meßbar. Wegen

$$\begin{aligned}&\int\limits_X \Big\|T[\varphi_n(x)] - T[\varphi_m(x)]\Big\| d\mu(x) \le \int\limits_X |||T||| \cdot \|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\| d\mu(x) \\ &= |||T||| \cdot \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{EF}}\end{aligned}$$

ist $(T\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge und daher $T\circ f$ $\mu-$integrierbar, insbesondere existiert

$$\int\limits_X T[f(x)]d\mu(x) = \lim_{n\to\infty}\int\limits_X T[\varphi_n(x)]d\mu(x) \in Z. \tag{3.15}$$

Ist $\varphi_n = \sum_{k=1}^{M(n)} y_k \mathbf{1}_{A_k}$, dann ist

$$T\left[\int_X \varphi_n d\mu\right] = T\left[\sum_{k=1}^{M(n)} y_k \mu(A_k)\right] = \sum_{k=1}^{M(n)} \mu(A_k) T[y_k] = \int_X T[\varphi_n] d\mu$$

und mit $\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \varphi_n d\mu$ und da T stetig ist, folgt mit (3.15):

$$\begin{aligned} T\left[\int_X f d\mu\right] &= T\left[\lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n d\mu\right] = \lim_{n\to\infty} T\left[\int_X \varphi_n d\mu\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_X T[\varphi_n] d\mu = \int_X T[f] d\mu \end{aligned}$$

□

Korollar 3.16. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum, $d \in \mathbb{N}$ und $f : X \to \mathbb{K}^d$ sei meßbar. $f = (f_1, ..., f_d) : X \to \mathbb{K}^d$ ist genau dann $\mu-$integrierbar, wenn jede Koordinatenfunktion $f_j : X \to \mathbb{K}$, $j = 1, ..., d$ $\mu-$integrierbar ist. In diesem Fall ist*

$$\int_X f d\mu = \left(\int_X f_1 d\mu, ... \int_X f_d d\mu\right) \tag{3.16}$$

Satz 3.17. *Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum und Y ein Banachraum. Dann gilt:*

a) $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ ist dicht in $(\mathcal{L}^1(X, \mu, Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}^1})$.

b) Jede $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}-$Cauchyfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(X, \mu, Y)$ konvergiert.

Beweis.

a) Es sei $k \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, Y)$ und $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Dann ist $(\varphi_n - \varphi_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ mit $\lim_{n\to\infty}(\varphi_n(x) - \varphi_k(x)) = f(x) - \varphi_k(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Nach (3.11) ist $\|f - \varphi_k\|_{\mathcal{L}^1} = \lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_k\|_{\mathcal{EF}}$. Da $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$Cauchyfolge ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|\varphi_n - \varphi_k\|_{\mathcal{EF}} < \varepsilon$ für alle $n, k \geq N(\varepsilon)$. Daraus folgt $\|f - \varphi_k\|_{\mathcal{L}^1} \leq \varepsilon$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$ und damit ist $\mathcal{EF}(X, \mu, Y)$ dicht in $\mathcal{L}^1(X, \mu, Y)$, denn für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subseteq \mathcal{L}^1(X, \mu, Y)$ und $f \in U$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $\{g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, Y) : \|f - g\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon\} \subseteq U$, also ist $U \cap \mathcal{EF}(X, \mu, Y) \neq \emptyset$.

b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}-$Cauchyfolge in $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\|f_l - f_m\|_{\mathcal{L}^1} < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $l, m \geq M(\varepsilon)$. Da $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ dicht ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\varphi_n \in \mathcal{EF}(X,\mu,Y)$ mit $\|f_n - \varphi_n\|_{\mathcal{L}^1} < 2^{-n}$. Wegen

$$\|\varphi_m - \varphi_l\|_{\mathcal{EF}} \leq \|\varphi_m - f_m\|_{\mathcal{L}^1} + \|f_m - f_l\|_{\mathcal{L}^1} + \|f_l - \varphi_l\|_{\mathcal{L}^1} \leq 2^{-m} + \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-l}$$

für $m, l \geq M(\varepsilon)$ ist $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{EF}}-$ Cauchyfolge in $\mathcal{EF}(X,\mu,Y)$. Nach Lemma 3.9 gibt es eine Teilfolge $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $\mu-$meßbares $f : X \to Y$ mit $f(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Im Beweis von Teil a) wurde dann insbesondere $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - \varphi_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} = 0$ gezeigt, daher läßt sich ein $N = N(\varepsilon) \geq M(\varepsilon)$ wählen mit $\|f - \varphi_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} < \frac{\varepsilon}{4}$ für $n_k \geq N(\varepsilon)$ und daher gilt:

$$\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1} \leq \|f - \varphi_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} + \|\varphi_{n_k} - f_{n_k}\|_{\mathcal{L}^1} + \|f_{n_k} - f_n\|_{\mathcal{L}^1} < \frac{\varepsilon}{4} + 2^{-n_k} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

für $n, n_k \geq N(\varepsilon)$ und $2^{-n_k} \leq \frac{\varepsilon}{4}$, dh. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1} = 0$.

$\square$

Satz 3.18 (majorisierte Konvergenz für banachraumwertige Funktionen)**.** *Es sei $(X,\mathcal{A},\mu)$ ein vollständiger, $\sigma-$endlicher Maßraum und Y ein Banachraum. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge in $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ und $g : X \to [0,\infty]$ sei $\mu-$integrierbar mit $\|f_n(x)\| \leq g(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$. Der punktweise Grenzwert $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiere für alle $x \in X$, dann gilt:*

- $\begin{array}{rcl} f : X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$ *ist $\mu-$integrierbar*
- $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{L}^1} = 0$
- $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu.$

Beweis. Definiere

$$\begin{array}{rcl} g_j : X & \to & [0,\infty] \\ x & \mapsto & \sup\{\|f_k(x) - f_l(x)\| : k, l \geq j\} \end{array}$$

dann gilt:

- $0 \leq g_j(x) \leq \|f_k(x) - f_l(x)\| \leq 2g(x)$ für alle $x \in X$, für alle $k, l, j \in \mathbb{N}$ mit $k, l \geq \mathbb{N}$, daher ist die Folge $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ durch die $\mu-$integrierbare Funktion $g : X \to [0,\infty]$ majorisiert.
- Da der punktweise Grenzwert $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für $\mu-$fast alle $x \in X$ existiert, ist $\lim\limits_{j\to\infty} g_j(x) = 0$ für $\mu-$fast alle $x \in X$.

Nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz für komplexwertige Funktionen ist also

$$\lim_{j\to\infty}\int_X g_j d\mu = \int_X \left(\lim_{j\to\infty} g_j\right) d\mu = 0$$

dh. $\left(\int_X g_j d\mu\right)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\int_X \|f_k - f_l\| d\mu \le \int_X \sup\{\|f_k - f_l\| : k, l \ge j\} d\mu = \int_X g_j d\mu = \|g_j\|_{\mathcal{L}^1} < \varepsilon$$

für alle $k, l \ge j \ge N(\varepsilon)$. Das zeigt, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine $\|\cdot\|_{\mathcal{L}^1}-$Cauchyfolge ist. Die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ in Satz 3.17 zeigt, daß der Grenzwert $f \in \mathcal{L}^1(X,\mu,Y)$ ist, $\lim\limits_{n\to\infty}\|f - f_n\|_{\mathcal{L}^1} = 0$ und $\int\limits_X f d\mu = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_X f_n d\mu$ □

Satz 3.19 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung II)**.** *Es sei Y ein Banachraum, es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a,b] \to Y$ sei stetig. Dann ist*

$$\begin{aligned} F : [a,b] &\to Y \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,x]}(t) f(t) d\tilde{\lambda}(t) \end{aligned}$$

wohldefiniert, F ist stetig auf $[a,b]$ und stetig differenzierbar auf $]a,b[$ und für jedes $t \in]a,b[$ gilt:

$$F'(t) = f(t). \tag{3.17}$$

Ist $G : [a,b] \to Y$ eine Funktion mit $G'(x) = f(x)$ für jedes $x \in]a,b[$, dann gilt

$$\int_c^d f(t)dt = G(d) - G(c) \tag{3.18}$$

für jedes $c, d \in]a,b[$.

Beweis. Da $f : [a,b] \to Y$ stetig ist, ist $f([a,b])$ kompakt, also insbesondere totalbeschränkt. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ gibt es also $M = M(m) \in \mathbb{N}$ und $y_1, ..., y_{M(m)} \in Y$ mit $f([a,b]) \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{M(m)} K(y_k, \frac{1}{m})$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} X_{1,m} &:= f^{-1}(K(y_1, \frac{1}{m})) \\ &\vdots \\ X_{k,m} &:= f^{-1}(K(y_k, \frac{1}{m}))\setminus\left(\bigcup_{j=1}^{k-1} X_{j,m}\right) \end{aligned}$$

eine Zerlegung von $[a, b] = \bigcup_{k=1}^{M(m)} X_{k,m}$ in paarweise disjunkte meßbare Mengen gegeben. Daher definiert $f_m : [a, b] \to Y$ mit $f_m(x) = y_k$, falls $x \in X_{k,m}$ ist eine Folge $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ von $\mu-$einfachen Funktionen mit $\|f_m(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{m}$, dh. $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ für alle $x \in [a, b]$, dh. f ist $\tilde{\lambda}-$meßbar. Da f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig ist, ist

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(t)| : t \in [a, b]\} < \infty$$

und damit $\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[a,b]}$ eine integrierbare Majorante für alle Funktionen $\mathbf{1}_{[a,x]} f$, $x \in [a, b]$. Nach Satz 3.13 ist jedes $\mathbf{1}_{[a,x]} f$ $\tilde{\lambda}-$integrierbar und damit

$$\begin{aligned} F : [a, b] &\to Y \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt := \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,x]}(t) f(t) d\tilde{\lambda}(t) \end{aligned}$$

wohldefiniert. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in [a, b]$, so gilt auch $\mathbf{1}_{[a,x]}(t) f(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{[a,x_n]}(t) f(t)$ für alle $t \in [a, b]$ und mit der $\tilde{\lambda}-$Majorante $\|f\|_\infty \mathbf{1}_{[a,b]}$ folgt aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz:

$$F(x) = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{[a,x]}(t) f(t) d\tilde{\lambda}(t) = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{[a,x_n]}(t) f(t) d\tilde{\lambda}(t) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

dh. F ist stetig. Weil f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ als stetig vorausgesetzt wurde, ist f sogar gleichmäßig stetig. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, so daß für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt: $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$. Ist nun $h \in \mathbb{R}$ mit $|h| < \delta$, dann ist für jedes $x \in]a, b[$

$$\|F(x + h) - F(x) - hf(x)\| = \left\| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right\| \leq \left| \int_x^{x+h} \|f(t) - f(x)\| dt \right| \leq |h|\varepsilon,$$

was $F'(x) = f(x)$ im Limes $h \to 0$ ergibt. Ist nun $G : [a, b] \to Y$ eine Funktion mit $G'(t) = f(t)$ für jedes $t \in]a, b[$, dann ist $G'(t) - F'(t) = (G - F)'(t) = 0$ für alle $t \in]a, b[$ und weil $]a, b[$ zusammenhängend ist, ist $G - F$ eine konstante Funktion. Deshalb gilt

$$\int_c^d f(t)dt = F(d) - F(c) = G(d) - G(c)$$

für alle $c, d \in]a, b[$. □

Korollar 3.20 (Mittelwertsatz in Integralform)**.** *Es seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ offen, $f : U \to Y$ stetig differenzierbar und $a, b \in U$ mit $[\![a, b]\!] \subseteq U$, dann gilt:*

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 Df(a + t(b - a))[b - a]dt = \int_0^1 D_{b-a} f(a + t(b - a))dt \tag{3.19}$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [0,1] & \to & Y \\ t & \mapsto & f(a+t(b-a)) \end{array}$$

stetig differenzierbar auf $]0,1[$ mit $\varphi'(t) = (Df)(a+t(b-a))[b-a]$ und stetig auf $[0,1]$. Nach dem Fundamentalsatz 3.19 der Differential- und Integralrechnung ist

$$f(b) - f(a) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)dt = \int_0^1 (Df)(a+t(b-a))[b-a]dt.$$

□

Korollar 3.21 (partielle Integration)**.** *Es sei Y ein $\mathbb{K}-$Banachraum, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $u : [a,b] \to Y$, $v : [a,b] \to \mathbb{K}$ seien stetig und stetig differenzierbar auf $]a,b[$. Dann gilt für alle $c, d \in [a,b]$, $c < d$:*

$$\int_c^d u(t)v'(t)dt = u(d)v(d) - u(c)v(c) - \int_c^d u'(t)v(t)dt. \tag{3.20}$$