2 Variation eines komplexen Maßes

Definition 2.1. *Es sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf einer Menge X und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß, dann heißt*

$$\begin{aligned} |\mu| : \mathcal{A} &\to [0,\infty] \\ A &\mapsto \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarweise disjunkter Elemente} \\ &\qquad A_n \in \mathcal{A} \text{ mit } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\} \end{aligned} \tag{2.1}$$

die **Variation** *von μ.*

Satz 2.2. *Die Variation $|\mu| : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ eines komplexen Maßes $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ist ein Maß auf $\mathcal{A}$.*

Beweis. Es sei $A \in \mathcal{A}$ und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente $A_n \in \mathcal{A}$ mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Es sei $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit

$$t_n < |\mu|(A_n). \tag{2.2}$$

Dann gibt es für jedes A_n eine Folge $(A_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ paarweise disjunkter Elemente $A_{n,k} \in \mathcal{A}$ mit $A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_{n,k}$ und $t_n < \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(A_{n,k})|$. Damit bildet $(A_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}^2}$ eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Elemente in $\mathcal{A}$ mit $A = \bigcup_{(n,k)\in\mathbb{N}^2} A_{n,k}$, also ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n \le \sum_{k,n=1}^{\infty} |\mu(A_{n,k})| \le |\mu(A)| \tag{2.3}$$

Bildet man in (2.3) das Supremum über alle nach (2.2) erlaubten Zahlen t_n, so ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \le |\mu|(A). \tag{2.4}$$

Es sei $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente $B_k \in \mathcal{A}$ mit $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k$; für jedes $k \in \mathbb{N}$ bildet $(A_n \cap B_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente $A_n \cap B_k \in \mathcal{A}$ mit $B_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_k)$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ bildet $(A_n \cap B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Elemente $A_n \cap B_k \in \mathcal{A}$ mit $A_n = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (A_n \cap B_k)$. Somit gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(B_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap B_k) \right| \\ &\le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_k)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(A_n \cap B_k)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Durch Supremumsbildung in (2.5) folgt

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &= \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(B_k)| : (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarweise disjunkter Elemente} \\ &\qquad B_k \in \mathcal{A} \text{ mit } A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Big\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mu|(A_n) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nach (2.4) und (2.6) ist $|\mu|$ $\sigma-$additiv. Offenbar ist $|\mu|(\emptyset) = 0$, also $|\mu|$ ein Maß. □

Lemma 2.3. *Es sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf X und $E : \mathcal{A} \to L(\mathcal{H})$ ein Spektralmaß, dann gilt für alle $A \in \mathcal{A}$ und $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$:*

$$|\mu_{\varphi,\phi}|(A) \leq (\mu_{\varphi,\varphi}(A))^{\frac{1}{2}} (\mu_{\phi,\phi}(A))^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Lemma 2.4. *Es sei $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra auf X und $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Maß. Dann gibt es $h : X \to \mathbb{C} \in L^1(|\mu|)$ mit $|h(x)| = 1$ für alle $x \in X$ und $d\mu = hd|\mu|$, dh.*

$$\mu(A) = \int_A hd|\mu| \tag{2.8}$$

für alle $A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Nach Definition von

$$\begin{aligned} |\mu|(A) &:= \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarweise disjunkter Elemente} \\ &\qquad A_n \in \mathcal{A} \text{ mit } A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \Big\} \end{aligned}$$

gilt $\mu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $|\mu|(A) = 0$. Somit ist μ absolutstetig bzgl. $|\mu|$ und nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es ein eindeutiges $h \in L^1(|\mu|)$, so daß $\mu(A) = \int_A hd|\mu|$ für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt. Zu $r > 0$ sei $A_r := \{x \in X : |h(x)| < r\}$ und $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter $B_k \in \mathcal{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = A_r$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mu(B_k)| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{B_k} hd|\mu| \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} r|\mu|(B_k) = r|\mu|(A_r)$$

und durch Supremumsbildung folgt

$$\begin{aligned} |\mu|(A_r) &:= \sup\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} |\mu(B_k)| : (B_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist eine Folge paarweise disjunkter Elemente} \\ &\qquad B_k \in \mathcal{A} \text{ mit } A_r = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \Big\} \leq r|\mu|(A_r) \end{aligned} \tag{2.9}$$

Für $r < 1$ läßt sich (2.9) nur mit $|\mu|(A_r) = 0$ erfüllen; nach Definition von A_r bedeutet dies $|h| \geq 1$, $|\mu|-$fast überall. Ist nun $A \in \mathcal{A}$ mit $|\mu|(A) > 0$, so folgt aus (2.8) und $|\mu(A)| \leq |\mu|(A)$

$$\left| \frac{1}{|\mu|(A)} \int\limits_A h d|\mu| \right| = \frac{|\mu(A)|}{|\mu|(A)} \leq 1,$$

dh. das Mittel über jede Menge mit $|\mu|(A) > 0$ liegt in $[0, 1]$, also ist $|h| \leq 1$ $|\mu|-$fast überall. Das zeigt $|\mu|(\{x \in X : |h(x)| \neq 1\}) = 0$ und nach Abändern von h auf dieser Menge $\{x \in X : |h(x)| \neq 1\}$ folgt die Behauptung. $\square$