

Excercise Sheet 9

Übung 1

Es seien $L_j : \mathcal{D}(L_j) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$ die Komponenten des Drehimpulses, also

$$(L_j[\psi])(\underline{x}) = \sum_{k,l=1}^3 \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ j & k & l \end{pmatrix} x_k (p_l[\psi])(\underline{x})$$

für alle $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ und $j = 1, 2, 3$. Zeige: Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\mathcal{D}_k := \text{lin} \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} : (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}_0^3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq k \end{array} \right\}$$

ist ein reduzierender Unterraum für L_1 , L_2 und L_3 .

Übung 2

Es sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\hat{S}_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \hat{p}_\pi : \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n} \rightarrow \mathcal{H}^{\hat{\otimes} n}$ der Symmetrisierungsoperator.

Zeige:

$$\hat{S}_{n+1} = \hat{S}_{n+1} \circ (\text{id}_{\mathcal{H}} \hat{\otimes} \hat{S}_n)$$