Übungsblatt 5 zu Mathematischer Quantenmechanik II

Aufgabe 1:

Es sei $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator, dann gilt:

- a) $\text{id} + T^*T : \mathcal{D}(T^*T) \rightarrow \mathcal{H}$ ist bijektiv und der inverse Operator

$$(\text{id} + T^*T)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(T^*T)$$

ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator mit $0 \leq \langle \phi, (\text{id} + T^*T)^{-1}[\phi] \rangle \leq \|\phi\|^2$ für alle $\phi \in \mathcal{H}$.

- b) T^*T ist selbstadjungiert mit $\langle \varphi, (T^*T)[\varphi] \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(T^*T)$ und $\mathcal{D}(T^*T) \subseteq \mathcal{D}(T)$ ist ein determinierender Bereich für T .

Aufgabe 2:

Es sei $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ ein dicht definierter abgeschlossener Operator, dann ist $(\text{id} + T^*T)^{-1}$ nach Aufgabe 1 ein beschränkter selbstadjungierter Operator und somit existiert nach dem Spektralkalkül eine eindeutige positive Quadratwurzel $\sqrt{(\text{id} + T^*T)^{-1}}$. Dann ist

$$Z_T := T\sqrt{(\text{id} + T^*T)^{-1}} \tag{1}$$

ein wohldefinierter beschränkter Operator mit

- a) $\|Z_T\| \leq 1$
 b) $(\text{id} + T^*T)^{-1} = \text{id} - Z_T^*Z_T$
 c) $(Z_T)^* = Z_T^*$
 d) Ist T selbstadjungiert, so ist Z_T selbstadjungiert.

Aufgabe 3:

Es seien A_1 und A_2 selbstadjungierte Operatoren in $\mathcal{H}$, dann sind äquivalent:

- a) $Z_{A_1}Z_{A_2} = Z_{A_2}Z_{A_1}$, dh. A_1 und A_2 kommutieren.
 b) Für die Spektralmaße E_{A_1} von A_1 und E_{A_2} von A_2 und alle $B, C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt:

$$E_{A_1}(B)E_{A_2}(C) = E_{A_2}(C)E_{A_1}(B). \tag{2}$$

- c) Für ein/alle $\lambda_1 \in \rho(A_1)$ gilt:

$$(A_1 - \lambda_1)^{-1}A_2 \subseteq A_2(A_1 - \lambda_1)^{-1}. \tag{3}$$

- d) Für ein/alle $\lambda_1 \in \rho(A_1)$ und ein/alle $\lambda_2 \in \rho(A_2)$ gilt:

$$(A_1 - \lambda_1)^{-1}(A_2 - \lambda_2)^{-1} = (A_2 - \lambda_2)^{-1}(A_1 - \lambda_1)^{-1}. \tag{4}$$

- e) Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{-itA_1}e^{-itA_2} = e^{-itA_2}e^{-itA_1} \tag{5}$$