Übungsblatt 3 zu Mathematische Quantenmechanik II

Aufgabe 1:
Consider the operators A_0 and A in $L^2([0,2\pi])$ given by

$$A_0 f = -if', \quad D(A_0) = \{f \in C^1([0,2\pi]) : f(0) = f(2\pi) = 0\}$$
$$Af = -if', \quad D(A) = \{f \in C^1([0,2\pi]) : f(0) = f(2\pi)\}$$

i) Prove that A_0 and A are symmetric, and that $A_0 \subset A$.

ii) Find A_0^* and $\overline{A_0}$.

iii) Find A^* and $\overline{A}$.

Aufgabe 2:
Let $A = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} : D(A) \to L^2(0,\pi)$ with $D(A) = \{f \in C^2(0,\pi); f(0) = f(\pi) = 0\}$.

i) Is A self-adjoint operator?.

ii) Let $\psi(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x(\pi - x) \in D(A)$. Find the error in the following argument:
"Since A is symmetric, we have $1 = \langle A\psi, A\psi \rangle = \langle \psi, A^2\psi \rangle = 0$"

Aufgabe 3:
Es sei V ein $K-$Vektorraum. Zeige, daß V und das algebraische Tensorprodukt $K \otimes V$ isomorph sind.

Aufgabe 4:
Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ $\mathbb{K}-$Hilberträume und sind $(e_i)_{i\in I}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_1$ und $(f_j)_{j\in J}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}_2$ und gibt es eine bijektive Abbildung $\tau : I \to J$, so gibt es genau eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ mit $U[e_i] = f_{\tau(i)}$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 5:
Sind $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}_2$ $\mathbb{K}-$Hilberträume und $U : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2 \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ eine stetige $\mathbb{K}-$lineare Abbildung, dann sind äquivalent:

a) U ist unitär.

b) Es gibt eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{H}_1$ und $(f_j)_{j\in J}$ von $\mathcal{H}_2$ und eine bijektive Abbildung $\tau : I \to J$ mit $U[e_i] = f_{\tau(i)}$ für alle $i \in I$.