Übungsblatt 2 zu Mathematische Quantenmechanik II

Aufgabe 1:
We define $S : \ell^2 \to \ell^2$ by $S(x_1, x_2, \dots) := (0, x_1, x_2, \dots)$.

i) Prove that $S \in \mathcal{B}(\ell^2)$ and determine $\|S\|$.

ii) Find the adjoint S^* of S.

iii) Determine the spectra, point spectra of S.

Aufgabe 2:
Let $\mathcal{H} = \sum_{j\in\mathbb{N}}^{\oplus} L^2(\mathbb{R}, \mathrm{d}\mu_j)$, where $\mu_j : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ is a given measure and let A be the operator on $\mathcal{H}$ with

$$D(A) = \left\{ (\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H} : \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} (1 + x^2)|\phi_j(x)|^2 \mathrm{d}\mu_j(x) < \infty \right\}$$

and $(A[\phi])_j(x) := x\phi_j(x)$. Prove that A is a self-adjoint operator.

Aufgabe 3:
Es sei $\emptyset \neq \Lambda$ und für jedes $\lambda \in \Lambda$ sei $\mathcal{H}_\lambda$ ein Hilbertraum mit einer Orthonormalbasis $(e_{\lambda,i})_{i\in I_\lambda}$. Dann gilt:

a) Für jedes $\mu \in \Lambda$ ist

$$\begin{aligned} \iota_\mu : \mathcal{H}_\mu &\to \sum_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda \qquad\qquad \in L\left(\mathcal{H}_\mu, \sum_{\lambda\in\Lambda}^{\oplus} \mathcal{H}_\lambda \right) \\ \psi_\mu &\mapsto \iota_\mu[\psi_\mu] = ((\iota_\mu[\psi_\mu])_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \end{aligned}$$

mit $(\iota_\mu[\psi_\mu])_\lambda := \begin{cases} \psi_\mu & \text{für } \lambda = \mu \\ \mathbf{0} & \text{für } \lambda \neq \mu \end{cases}$ isometrisch und damit injektiv.

b) $(\iota_\lambda[e_{\lambda,i}])_{\lambda\in\Lambda, i\in I_\lambda}$ ist eine Orthonormalbasis von $\sum_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{H}_\lambda$.

Aufgabe 4:
Es seien $(A_\lambda : \mathcal{D}(A_\lambda) \to \mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ und $(B_\lambda : \mathcal{D}(B_\lambda) \to \mathcal{H}_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ Familien von Operatoren, dann gilt

a) $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right) + \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \right) \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda + B_\lambda)$

b) Gibt es ein $c > 0$ mit $\|A_\lambda[\psi_\lambda]\|^2 + \|B_\lambda[\psi_\lambda]\|^2 \leq c(\|(A_\lambda + B_\lambda)[\psi_\lambda]\|^2 + \|\psi_\lambda\|^2)$ für jedes $\psi_\lambda \in \mathcal{D}(A_\lambda) \cap \mathcal{D}(B_\lambda)$, so gilt

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right) + \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda + B_\lambda)$$

c) Gilt $B_\lambda \in L(\mathcal{H}_\lambda)$ und $\sup\{|||B_\lambda||| : \lambda \in \Lambda\} < \infty$, so gilt

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \right) + \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \right) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda + B_\lambda)$$