

Übungsblatt 12 zu Mathematische Quantenmechanik II

Aufgabe 1:

Es sei \mathcal{H} ein Hilbertraum und \mathcal{N}_b der Teilchenzahloperator in $\mathcal{F}_b(\mathcal{H})$, $\psi \in \mathcal{H}$ und $a(\psi) = \overline{a^-(\psi)}$.
Zeige:

$$\mathcal{D}\left((\mathcal{N}_b + 1)^{\frac{1}{2}}\right) \subseteq \mathcal{D}(a(\psi)) \quad \text{und} \quad \mathcal{D}\left((\mathcal{N}_b + 1)^{\frac{1}{2}}\right) \neq \mathcal{D}(a(\psi))$$

Aufgabe 2:

Zeige: Ist $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ unitär, $f \in \mathcal{H}$, so gilt für alle $\Phi \in \mathcal{F}_{b,e}(\mathcal{H})$

$$\begin{aligned} \Gamma_b(U)a^+(f)(\Gamma_b(U))^*[\Phi] &= a^+(U[f])[\Phi] \\ \Gamma_b(U)a^-(f)(\Gamma_b(U))^*[\Phi] &= a^-(U[f])[\Phi] \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Zeige: Sind $S : \mathcal{D}(S) \rightarrow \mathcal{H}$ und $T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{H}$ selbstadjungiert, dann sind äquivalent:

- a) S und T kommutieren
- b) $d\Gamma(S)$ und $d\Gamma(T)$ kommutieren
- c) $d\Gamma_b(S)$ und $d\Gamma_b(T)$ kommutieren