

1 Netze und summierbare Familien

Definition 1.1. Es sei $\emptyset \neq I$ eine **nach rechts gerichtete Menge**, dh. $(I, \leq)$ ist eine geordnete Menge, so daß es zu je zwei Elementen $i, j \in I$ eine obere Schranke $k \in I$ mit $i \leq k, j \leq k$ gibt. Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum und I nach rechts gerichtet, dann heißt eine **Familie** $(x_i)_{i \in I}$ von Elementen in X – dh. eine Abbildung $x : I \rightarrow X$ – ein

$$i \mapsto x_i$$

Netz in X . Ist $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X , dann heißt $a \in X$ ein

a) **Grenzwert** von $(x_i)_{i \in I}$, genau dann wenn es für jede Umgebung U von a ein $j(U) \in I$ gibt, so daß $x_i \in U$ für alle $i \in I$ mit $j(U) \leq i$ gilt. Schreibweise:

$$a = \lim_{i \in I} x_i.$$

b) **Häufungspunkt** von $(x_i)_{i \in I}$, genau dann wenn für jede Umgebung U von a und für alle $i \in I$ ein $j \in I$ mit $j \geq i$ und $x_j \in U$ gibt.

Lemma 1.2. Ist $(X, \mathcal{O})$ ein hausdorffscher topologischer Raum, dann hat jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X höchstens einen Grenzwert.

Satz 1.3. Sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ topologische Räume, $a \in X$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Funktion, dann sind äquivalent:

a) f ist stetig in a .

b) Für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ in X mit $a = \lim_{i \in I} x_i$ gilt $f(a) = \lim_{i \in I} f(x_i)$.

Beweis.

a) $\Rightarrow$ b) Ist V Umgebung von $f(a)$, dann ist $U := f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a mit $f(U) \subseteq V$. Ist nun $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X mit $a = \lim_{i \in I} x_i$, so gibt es $j(U) \in I$ mit $x_i \in U$ für alle $i \geq j(U)$ und damit ist $f(x_i) \in V$ für alle $i \geq j(U)$, dh.

$$f(a) = \lim_{i \in I} f(x_i).$$

b) $\Rightarrow$ a) Angenommen f ist in a nicht stetig, so gibt es eine Umgebung V von $f(a)$ mit $f(U) \not\subseteq V$ für jede Umgebung U von a . Betrachte die Menge $\mathcal{U}(a)$ aller Umgebungen von a ; diese ist nach rechts gerichtet. Daher gibt es für alle $U \in \mathcal{U}(a)$ ein $x_U \in U$ mit $f(x_U) \notin V$. Somit definiert $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(a)}$ ein Netz in X mit $a = \lim_{U \in \mathcal{U}(a)} x_U$ aber

$$f(a) \neq \lim_{U \in \mathcal{U}(a)} f(x_U).$$

□

Lemma 1.4. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ und $a \in X$, dann sind äquivalent:

a) $a \in \overline{A}$

b) Es gibt ein Netz $(x_i)_{i \in I}$ in A mit $a = \lim_{i \in I} x_i$.

Beweis.

- a) $\Rightarrow$ b) Ist $a \in \overline{A}$, so gilt $U \cap A \neq \emptyset$ für jede Umgebung U von a . Wir können also zu $U \in \mathcal{U}(a)$ ein $x_U \in U \cap A$ wählen, dann ist $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(a)}$ ein Netz in A mit $a = \lim_{U \in \mathcal{U}(a)} x_U$.
- b) $\Rightarrow$ a) Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in A mit $a = \lim_{i \in I} x_i$ und U eine Umgebung von a , dann gibt es $j(U) \in I$ mit $x_i \in U$ für alle $i \in I, i \geq j(U)$, dh. $\emptyset \neq \{x_i : i \geq j(U)\} \subseteq U \cap A$, also ist a Berührungspunkt von A .

□

Definition 1.5. Ist (X, d) ein metrischer Raum, $(x_i)_{i \in I}$ ein Netz in X , so heißt $(x_i)_{i \in I}$ ein **Cauchynetz**, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $j = j(\varepsilon) \in I$ gibt, so daß für alle $k, l \in I$ mit $k \geq j(\varepsilon)$ und $l \geq j(\varepsilon)$ gilt:

$$d(x_k, x_l) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

Bemerkung 1.6. Im Fall $I = \mathbb{N}$ sind “Folge” und “Netz”, “Cauchyfolge” und “Cauchynetz” und ebenso “Grenzwert von Folgen” und “Grenzwert von Netzen” identisch.

Lemma 1.7. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein konvergentes Netz in X . Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchynetz.

Satz 1.8. Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchynetz in X , dann konvergiert $(x_i)_{i \in I}$.

Beweis. Ist $(x_i)_{i \in I}$ ein Cauchynetz in X , so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $\varphi(k) \in I$, so daß $d(x_i, x_j) < \frac{1}{k}$ für alle $i, j \in I$ mit $i \geq \varphi(k)$ und $j \geq \varphi(k)$. Ohne Einschränkung darf man $\varphi(k+1) \geq \varphi(k)$ annehmen, denn da I nach rechts gerichtet ist, kann man gegebenenfalls $\varphi(k+1)$ durch eine obere Schranke von $\varphi(k)$ und $\varphi(k+1)$ ersetzen. Dann ist $(x_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X ; diese konvergiert nach Voraussetzung und so sei $x := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\varphi(k)}$ der Grenzwert. Zum Nachweis von $x = \lim_{i \in I} x_i$ sei $\varepsilon > 0$, dann existiert wegen $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{\varphi(k)}$ ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $d(x, x_{\varphi(k)}) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k \geq N(\varepsilon)$ und nach evtl. Vergrößern von $N(\varepsilon)$ darf man noch $\frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$ annehmen. Ist nun $i \in I$ mit $i \geq \varphi(N(\varepsilon))$, so folgt aus der Dreiecksungleichung

$$d(x, x_i) \leq d(x, x_{\varphi(N(\varepsilon))}) + d(x_{\varphi(N(\varepsilon))}, x_i) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon,$$

dh. $x = \lim_{i \in I} x_i$ ist der Grenzwert von $(x_i)_{i \in I}$.

□

Definition 1.9. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $\emptyset \neq I$ eine Indexmenge und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in V . Zu jeder endlichen Teilmenge $H \in \mathcal{E}(I)$ sei

$$s_H := \sum_{i \in H} x_i$$

die **Partialsomme** von $(x_i)_{i \in I}$ zu H . Durch

$$H \leq J : \Leftrightarrow H \subseteq J \quad (1.2)$$

wird $\mathcal{E}(I)$ zu einer nach rechts gerichteten Menge und damit

$$(s_H)_{H \in \mathcal{E}(I)} = \left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$$

ein Netz in V . $(x_i)_{i \in I}$ heißt **summierbare Familie**, wenn

$$\lim_{H \in \mathcal{E}(I)} s_H = \lim_{H \in \mathcal{E}(I)} \sum_{i \in H} x_i$$

existiert. $(x_i)_{i \in I}$ ist **summierbar mit Grenzwert** $a \in V$, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ ein $J = J(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$ gibt, so daß für alle $H \in \mathcal{E}(I)$ mit $H \supseteq J(\varepsilon)$ gilt:

$$\|a - s_H\| = \left\| a - \sum_{i \in H} x_i \right\| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreibt man $a = \sum_{i \in I} x_i = \lim_{H \in \mathcal{E}(I)} \sum_{i \in H} x_i$.

Lemma 1.10. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, I und J Mengen und $\varphi : I \rightarrow J$ bijektiv. Dann ist eine Familie $(x_j)_{j \in J}$ in V genau dann summierbar, wenn $(x_{\varphi(i)})_{i \in I}$ summierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{j \in J} x_j = \sum_{i \in I} x_{\varphi(i)}.$$

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Es sei $(x_j)_{j \in J}$ summierbar, dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $H(\varepsilon) \in \mathcal{E}(J)$, so daß für alle $L \in \mathcal{E}(J)$ mit $H(\varepsilon) \subseteq L$ und für den Grenzwert $x := \sum_{j \in J} x_j$ gilt:

$$\left\| x - \sum_{j \in L} x_j \right\| < \varepsilon.$$

Da φ bijektiv ist, sind für jedes solche $L \in \mathcal{E}(J)$ mit $L \supseteq H(\varepsilon)$ auch $\varphi^{-1}(L) \supseteq \varphi^{-1}(H(\varepsilon))$ endliche Teilmengen von I und wegen $\sum_{j \in L} x_j = \sum_{i \in \varphi^{-1}(L)} x_{\varphi(i)}$ ist auch

$$\left\| x - \sum_{j \in L} x_j \right\| = \left\| x - \sum_{i \in \varphi^{-1}(L)} x_{\varphi(i)} \right\| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Ferner hat jede endliche Teilmenge $K \in \mathcal{E}(I)$ mit $K \supseteq \varphi^{-1}(H(\varepsilon))$ die Form $K = \varphi^{-1}(L)$ mit $L \in \mathcal{E}(J)$ und $L \supseteq H(\varepsilon)$, daher ist wegen (1.3) die Familie $(x_{\varphi(i)})_{i \in I}$ summierbar.

„ $\Leftarrow$ “ Es sei $(x_{\varphi(i)})_{i \in I}$ summierbar und $\varepsilon > 0$, dann gibt es $L(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß für $y := \sum_{i \in I} x_{\varphi(i)}$ und für jedes $K \in \mathcal{E}(I)$ mit $K \supseteq L(\varepsilon)$ gilt $\left\| y - \sum_{i \in K} x_{\varphi(i)} \right\| < \varepsilon$. Jedes $H \in \mathcal{E}(J)$ mit $H \supseteq \varphi(L(\varepsilon))$ hat die Form $H = \varphi(K)$ mit $K \supseteq L(\varepsilon)$, daher gilt:

$$\left\| y - \sum_{j \in H} x_j \right\| = \left\| y - \sum_{i \in K} x_{\varphi(i)} \right\| < \varepsilon$$

also ist $(x_j)_{j \in J}$ summierbar und $y = \sum_{i \in I} x_{\varphi(i)} = \sum_{j \in J} x_j$. $\square$

Satz 1.11.

a) Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum, $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in V , so ist $(\sum_{i \in H} x_i)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ genau dann ein Cauchynetz, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $J = J(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$ gibt, so daß für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap J(\varepsilon) = \emptyset$ gilt:

$$\left\| \sum_{l \in L} x_l \right\| < \varepsilon \quad (1.4)$$

b) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in X , dann ist $(x_i)_{i \in I}$ genau dann summierbar, wenn $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz in X ist.

Beweis.

a) „ $\Rightarrow$ “ Es sei $\varepsilon > 0$ und $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz in V , dann gibt es ein $J = J(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß für alle $K, L \in \mathcal{E}(I)$ mit $K \supseteq J(\varepsilon)$ und $L \supseteq J(\varepsilon)$ gilt:

$$\|s_K - s_L\| = \left\| \sum_{i \in K} x_i - \sum_{j \in L} x_j \right\| < \varepsilon \quad (1.5)$$

Ist $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap J(\varepsilon) = \emptyset$, so ist

$$s_L = \sum_{i \in L} x_i = s_{L \cup J(\varepsilon)} - s_{J(\varepsilon)} = \sum_{i \in L \cup J(\varepsilon)} x_i - \sum_{i \in J(\varepsilon)} x_i.$$

Wegen $L \cup J(\varepsilon) \supseteq J(\varepsilon)$ folgt nun $\|s_L\| = \|s_{L \cup J(\varepsilon)} - s_{J(\varepsilon)}\| < \varepsilon$ aus (1.5).

a) „ $\Leftarrow$ “ Zu $\varepsilon > 0$ gebe es $J = J(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap J(\varepsilon) = \emptyset$ gilt:

$$\|s_L\| = \left\| \sum_{j \in L} x_j \right\| < \varepsilon. \text{ Sind nun } K, L \in \mathcal{E}(I) \text{ mit } K \supseteq J(\varepsilon) \text{ und } L \supseteq J(\varepsilon), \text{ dann ist}$$

$s_L = s_{L \setminus J(\varepsilon)} + s_{J(\varepsilon)}$ und $s_K = s_{K \setminus J(\varepsilon)} + s_{J(\varepsilon)}$ also

$$\|s_K - s_L\| = \|s_{K \setminus J(\varepsilon)} - s_{L \setminus J(\varepsilon)}\| \leq \|s_{K \setminus J(\varepsilon)}\| + \|s_{L \setminus J(\varepsilon)}\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

also ist $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz in V .

b),,⇒“ Es sei $(x_i)_{i \in I}$ summierbar und $x := \lim_{H \in \mathcal{E}(I)} \sum_{i \in H} x_i$ der Grenzwert. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es

dann $J = J(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß für alle $H \in \mathcal{E}(I)$ mit $H \supseteq J(\varepsilon)$ gilt: $\left\| x - \sum_{i \in H} x_i \right\| < \varepsilon$.

Daher gilt für alle $K, L \in \mathcal{E}(I)$ mit $K \supseteq J(\varepsilon)$, $L \supseteq J(\varepsilon)$:

$$\|s_K - s_L\| = \left\| \sum_{j \in K} x_j - \sum_{j \in L} x_j \right\| \leq \|x - s_K\| + \|x - s_L\| \leq 2\varepsilon$$

dh. $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ist ein Cauchynetz.

b),,⇐“ Nach Satz 1.8 ist im Banachraum jedes Cauchynetz konvergent, also auch das Cauchynetz $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$, dh. $(x_i)_{i \in I}$ summierbar.

□

Lemma 1.12. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie in V . Dann gilt:

- a) Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nur endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_{N(\varepsilon)} \in I$ mit $\|x_j\| > \varepsilon$ für $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$.
- b) $\left\{ \sum_{j \in H} x_j : H \in \mathcal{E}(I) \right\}$ ist beschränkt.
- c) $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ ist abzählbar.

Satz 1.13. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie in X und $J \subseteq I$. Dann ist auch $(x_j)_{j \in J}$ summierbar.

Satz 1.14. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie in X und $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Zerlegung von I , dann existiert für jedes $\lambda \in \Lambda$ der Grenzwert $\sum_{i \in I_\lambda} x_i$ und die

Familie $\left(\sum_{i \in I_\lambda} x_i \right)_{\lambda \in \Lambda}$ ist summierbar und es gilt:

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} x_i \right). \quad (1.6)$$

Beweis. Ist $(x_i)_{i \in I}$ eine summierbare Familie im Banachraum X , so ist nach Satz 1.13 für jedes $J \subseteq I$ auch $(x_j)_{j \in J}$ eine summierbare Familie. Insbesondere ist jede Familie $(x_i)_{i \in I_\lambda}$ summierbar und damit existiert für jedes $\lambda \in \Lambda$ der Grenzwert

$$s_\lambda := \sum_{i \in I_\lambda} x_i.$$

Es sei $s := \sum_{i \in I} x_i$ der Grenzwert der summierbaren Familie $(x_i)_{i \in I}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $H(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß

$$\left\| s - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für jedes $J \in \mathcal{E}(I)$ mit $J \supseteq H(\varepsilon)$ erfüllt ist. Da $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz ist, können wir nach Satz 1.11 sogar

$$\left\| \sum_{i \in L} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap H(\varepsilon) = \emptyset$ voraussetzen. Es sei

$$M(\varepsilon) := \{ \lambda \in \Lambda : H(\varepsilon) \cap I_\lambda \neq \emptyset \} \in \mathcal{E}(\Lambda),$$

– da $H(\varepsilon)$ endlich ist, ist es auch $M(\varepsilon)$. Ist $K = \{k_1, \dots, k_N\} \in \mathcal{E}(\Lambda)$ mit $M(\varepsilon) \subseteq K$, so wähle $J_{k_1} \in \mathcal{E}(I_{k_1}), \dots, J_{k_N} \in \mathcal{E}(I_{k_N})$ mit $H(\varepsilon) \cap I_{k_n} \subseteq J_{k_n}$ und

$$\left\| s_{k_n} - \sum_{j \in J_{k_n}} x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{3N}$$

Nach Definition von $M(\varepsilon)$ ist

$$H(\varepsilon) \subseteq J(\varepsilon) := \bigcup_{\lambda \in M(\varepsilon)} J_\lambda \in \mathcal{E}(I)$$

und

$$L(\varepsilon) := \bigcup_{\lambda \in K \setminus M(\varepsilon)} J_\lambda \in \mathcal{E}(I)$$

mit $L(\varepsilon) \cap H(\varepsilon) = \emptyset$. Die Assoziativität für endliche Summen ergibt

$$\sum_{j \in J(\varepsilon)} x_j = \sum_{\lambda \in M(\varepsilon)} \left(\sum_{j \in J_\lambda} x_j \right)$$

und

$$\sum_{j \in L(\varepsilon)} x_j = \sum_{\lambda \in K \setminus M(\varepsilon)} \left(\sum_{j \in J_\lambda} x_j \right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}
\left\| s - \sum_{\lambda \in K} s_\lambda \right\| &= \left\| s - \sum_{\lambda \in K} \left(s_\lambda - \sum_{j \in J_\lambda} x_j + \sum_{j \in J_\lambda} x_j \right) \right\| \\
&= \left\| s - \sum_{\lambda \in M(\varepsilon)} \left(\sum_{j \in J_\lambda} x_j \right) + \sum_{\lambda \in K} \left(s_\lambda - \sum_{j \in J_\lambda} x_j \right) - \sum_{\lambda \in K \setminus M(\varepsilon)} \sum_{j \in J_\lambda} x_j \right\| \\
&\leq \left\| s - \sum_{j \in J(\varepsilon)} x_j \right\| + \sum_{n=1}^N \left\| s_{k_n} - \sum_{j \in J_{k_n}} x_j \right\| + \left\| \sum_{j \in L(\varepsilon)} x_j \right\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + N \frac{\varepsilon}{3N} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Daher ist $(s_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ summierbar mit Grenzwert $s = \sum_{i \in I} x_i = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(\sum_{i \in I_\lambda} x_i \right)$. $\square$

Definition 1.15. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in V . Dann heißt $(x_i)_{i \in I}$ **absolut summierbar**, wenn $(\|x_i\|)_{i \in I}$ summierbar in $[0, \infty[$ ist.

Lemma 1.16. Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine Familie in V , dann ist $(x_i)_{i \in I}$ genau dann absolut summierbar, wenn

$$\sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\} < \infty \quad (1.7)$$

ist. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{i \in I} \|x_i\| = \sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\}. \quad (1.8)$$

Beweis.

„ $\Rightarrow$ “ Ist $(x_i)_{i \in I}$ absolut summierbar, so ist $(\|x_i\|)_{i \in I}$ summierbar, also nach Satz 1.11

ein Cauchynetzt und daher $\left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt, also existiert

$$\sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\} < \infty.$$

„ $\Leftarrow$ “ Ist $s := \sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\} < \infty$ und $\varepsilon > 0$, dann gibt es nach Definition

des Supremums ein $H(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$ mit $\sum_{j \in H(\varepsilon)} \|x_j\| \geq s - \varepsilon$. Da $\|x_j\| \geq 0$ ist, gilt

$$\sum_{j \in H(\varepsilon)} \|x_j\| \leq \sum_{j \in L} \|x_j\| \leq s = \sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\}$$

für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $H(\varepsilon) \subseteq L$ und damit ist $(\|x_i\|)_{i \in I}$ summierbar mit Grenzwert

$$s = \sup \left\{ \sum_{j \in H} \|x_j\| : H \in \mathcal{E}(I) \right\}. \quad \square$$

Lemma 1.17. *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $(x_i)_{i \in I}$ eine absolut summierbare Familie in X . Dann ist $(x_i)_{i \in I}$ summierbar und es gilt:*

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\| \leq \sum_{i \in I} \|x_i\|. \quad (1.9)$$

Beweis. Für $H \in \mathcal{E}(I)$ gilt nach Lemma 1.16:

$$\left\| \sum_{i \in H} x_i \right\| \leq \sum_{i \in H} \|x_i\| \leq \sup \left\{ \sum_{i \in L} \|x_i\| : L \in \mathcal{E}(I) \right\} = \sum_{i \in I} \|x_i\|$$

Da $(x_i)_{i \in I}$ absolut summierbar ist, ist $\left(\sum_{i \in H} \|x_i\| \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz und daher gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ nach Satz 1.11 ein $H(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$, so daß $\sum_{i \in L} \|x_i\| < \varepsilon$ für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap H(\varepsilon) = \emptyset$ erfüllt ist. Dann gilt für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \cap H(\varepsilon) = \emptyset$ auch

$$\left\| \sum_{i \in L} x_i \right\| \leq \sum_{i \in L} \|x_i\| < \varepsilon$$

und damit ist $\left(\sum_{i \in H} x_i \right)_{H \in \mathcal{E}(I)}$ ein Cauchynetz und daher $(x_i)_{i \in I}$ summierbar. Es sei nun $x := \sum_{i \in I} x_i$ der Grenzwert der summierbaren Familie $(x_i)_{i \in I}$, $\varepsilon > 0$ und $K(\varepsilon) \in \mathcal{E}(I)$,

so daß für alle $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \supseteq K(\varepsilon)$ gilt: $\left\| x - \sum_{i \in L} x_i \right\| < \varepsilon$, für solche $L \in \mathcal{E}(I)$ mit $L \supseteq K(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} \|x\| &= \left\| x - \sum_{i \in L} x_i + \sum_{i \in L} x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in L} x_i \right\| + \left\| \sum_{i \in L} x_i \right\| \leq \varepsilon + \sum_{i \in L} \|x_i\| \\ &\leq \varepsilon + \sup \left\{ \sum_{i \in L} \|x_i\| : L \in \mathcal{E}(I), L \supseteq K(\varepsilon) \right\} \leq \varepsilon + \sup \left\{ \sum_{i \in L} \|x_i\| : L \in \mathcal{E}(I) \right\} \\ &= \varepsilon + \sum_{i \in I} \|x_i\| \end{aligned} \quad (1.10)$$

und da man (1.10) für jedes $\varepsilon > 0$ bekommt, folgt $\|x\| = \left\| \sum_{i \in I} x_i \right\| \leq \sum_{i \in I} \|x_i\|$. $\square$

Satz 1.18. *Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum und $\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe in X , dann sind äquivalent:*

a) $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine absolut konvergente Reihe.

b) Die Familie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist absolut summierbar.

In diesem Fall ist

$$\sup \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k\| : n \in \mathbb{N} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \|x_k\| \quad (1.11)$$

der Grenzwert.