Übungsblatt 9 zu Mathematik II für Physiker

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 84 (10 Punkte).

Gegeben sei eine Menge von n Massepunkten mit Positionen $\underline{x}_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ x_{k3} \end{pmatrix}$, $k \in \{1, ..., n\}$ und Masse m_k, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\underline{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ um die Drehachse $\frac{\underline{\omega}}{\|\underline{\omega}\|}$ rotieren. Sei außerdem $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$, dann besitzen die Massenpunkte die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k (\underline{\omega} \times \underline{x}_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} m_k \sum_{(i,j) \in \{1,2,3\}^2} (\langle \underline{x}_k, \underline{x}_k \rangle_{\mathbb{R}^3} \delta_{ij} - x_{ki} x_{kj}) \omega_i \omega_j.$$

Für eine bestimmte Anordnung von Massepunkten mit jeweils der Masse $m = 1$ erhalte man in Abhängigkeit von $\underline{w}$ folgende kinetische Energie:

$$E_{kin} = 2\omega_1^2 + 2\omega_2^2 + 5\omega_3^2 + 2\omega_1\omega_2 - 2\omega_1\omega_3 - 2\omega_2\omega_3.$$

Finde zunächst eine selbstadjungierte Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$, so dass für diese Anordnung $E_{kin} = \frac{1}{2} \langle \underline{\omega}, A\underline{\omega} \rangle_{\mathbb{R}^3}$ für alle $\underline{\omega} \in \mathbb{R}^3$ gilt und finde mit Hilfe dieser Darstellung eine Orthonormalbasis $(\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ des $\mathbb{R}^3$, so dass für $\underline{\tilde{\omega}} := \tilde{\omega}_1 \underline{v}_1 + \tilde{\omega}_2 \underline{v}_2 + \tilde{\omega}_3 \underline{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \langle \underline{\tilde{\omega}}, A\underline{\tilde{\omega}} \rangle_{\mathbb{R}^3} = \frac{J_1}{2} \tilde{\omega}_1^2 + \frac{J_2}{2} \tilde{\omega}_2^2 + \frac{J_3}{2} \tilde{\omega}_3^2 \text{ mit } J_i \in \mathbb{R},\ i \in \{1, 2, 3\}.$$

Wir wollen jetzt alle Funktionen einer Variablen auf diagonalisierbare Matrizen übertragen.

Definition 1. *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben. Wir definieren zuerst auf den Diagonalmatrizen*

$$f_\# \left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & f(\lambda_n) \end{pmatrix}, \tag{1}$$

und dann für $A := TDT^{-1} \in M(n, \mathbb{C})$ mit einer Diagonalmatrix $D \in M(n, \mathbb{C})$ und einer invertierbaren Matrix $T \in M(n, \mathbb{C})$ sei

$$f_\#(A) := T f_\#(D) T^{-1}. \tag{2}$$

Unter anderem können wir jetzt beliebige Funktionen einer Variablen von den selbstadjungierten und unitären Matrizen betrachten, da alle solche Matrizen diagonalisierbar sind.

Bemerkung 2. *Die Funktion f aus der Definition 1 muss eigentlich nicht auf dem ganzen $\mathbb{C}$, sondern nur auf den Eigenwerten von A definiert sein, um $f_\#(A)$ zu definieren.*

Aufgabe 85: (10 Punkte).
Beweise, dass für jede diagonalisierbare Matrix $A \in M(n, \mathbb{C})$ und jede Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Matrix $f_\#(A)$ eindeutig definiert ist, d.h., falls für Diagonalmatrizen $D, \widetilde{D} \in M(n, \mathbb{C})$ und invertierbare Matrizen $T, \widetilde{T} \in M(n, \mathbb{C})$

$$A = TDT^{-1} = \widetilde{T}\widetilde{D}\widetilde{T}^{-1} \tag{3}$$

gilt, dann gilt auch $Tf_\#(D)T^{-1} = \widetilde{T}f_\#(\widetilde{D})\widetilde{T}^{-1}$ (siehe (2)).
Hinweis: Beweise, dass für $S := \widetilde{T}^{-1}T$ aus (3)

$$SD = \widetilde{D}S$$

folgt. Was bedeutet das für die Matrixelemente von S?

Aufgabe 86: (10 Punkte).
Seien $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ selbstadjungierte Matrizen mit $AB = BA$. Beweise, dass

$$\text{für alle } f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ gilt:} \quad f_\#(A)g_\#(B) = g_\#(B)f_\#(A)$$

(siehe Definition 1 und Bemerkung 2).

Aufgabe 87: (10 Punkte).
Für

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(4, \mathbb{C}), \qquad \begin{aligned} f &: \mathbb{C} \to \mathbb{R} \\ f &: z \mapsto |z| \end{aligned}$$

berechne $f_\#(B)$ im Sinne von Definition 1.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 20.06.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.