

Übungsblatt 8 zu Mathematik II für Physiker

Sei $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 81 (12 Punkte).

Sei \mathcal{P}_n der Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$ (siehe Blatt 1, Aufgabe 58). Sei $\mathcal{M}_n := \{P_j, j = 0, \dots, n\}$ die Basis von \mathcal{P}_n bestehend aus den Monomen $P_j(z) := z^j$.

a) Beweise, dass die Regel

$$\langle P_j, P_k \rangle := (j+k)! \quad \text{für alle } j, k \in \{0, \dots, n\} \quad (1)$$

ein Skalarprodukt auf \mathcal{P}_n eindeutig definiert.

b) Finde eine Orthonormalbasis von \mathcal{P}_3 bezüglich dieses Skalarproduktes.

Aufgabe 82: (14 Punkte).

Sei $A \in M(n, \mathbb{C})$ eine selbstadjungierte Matrix. Betrachte die Abbildung

$$Q : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \\ v \mapsto \langle v, Av \rangle_{\mathbb{C}^n}.$$

a) Beweise, dass das Bild von Q in \mathbb{R} liegt, d.h., $Q(\mathbb{C}^n) \subseteq \mathbb{R}$.

b) Beweise ferner, dass für alle $v \in \mathbb{C}^n$ mit $\|v\|_{\mathbb{C}^n} = 1$ der Wert $Q(v)$ im Intervall $[\lambda_1, \lambda_n] \subseteq \mathbb{R}$ liegt, wobei λ_1 der kleinste und λ_n der größte Eigenwert von A ist.

Aufgabe 83: (14 Punkte).

Sei

$$A := \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme eine Orthonormalbasis von \mathbb{R}^4 bestehend aus Eigenvektoren von A .

b) Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ definiert die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{A, \lambda} : \mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}, \\ (v, w) \mapsto \langle v, (A - \lambda E_4)w \rangle_{\mathbb{C}^4} \quad (2)$$

ein Skalarprodukt in \mathbb{C}^4 ?

c) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ so, dass (2) ein Skalarprodukt in \mathbb{C}^4 ist. Finde die größte Zahl $m \in \mathbb{R}$ und die kleinste Zahl $M \in \mathbb{R}$, sodass für alle $v \in \mathbb{C}^4$ die Ungleichungen

$$m\|v\|_{\mathbb{C}^4}^2 \leq \langle v, v \rangle_{A, \lambda} \leq M\|v\|_{\mathbb{C}^4}^2$$

gelten.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 06.06.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.