Übungsblatt 6 zu Mathematik II für Physiker

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A, B \in M(n, \mathbb{C})$.

Aufgabe 76 (10 Punkte).

a) Zeige, dass die Gleichheit

$$\mathrm{e}^{A+B} = \mathrm{e}^{A}\mathrm{e}^{B} \tag{1}$$

im Allgemeinen falsch sein kann durch Berechnung der beiden Seiten von (1) für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Siehe Blatt 4 für die Definition der Exponentialfunktion).

b) Beweise, dass (1) immer wahr ist, falls A und B kommutieren, d.h. $AB = BA$ gilt.

Aufgabe 77: (10 Punkte)
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachte den $(n \times n)$-Jordan-Block

$$A_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.,} \quad (A_\lambda)_{ij} := \begin{cases} \lambda, & \text{für } j = i, \\ 1, & \text{für } j = i+1, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Beweise, dass für alle $t \in \mathbb{C}$

$$(\mathrm{e}^{tA_\lambda})_{ij} = \begin{cases} \dfrac{t^{j-i}\mathrm{e}^{t\lambda}}{(j-i)!}, & \text{für } j \geq i, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad \text{für alle } i, j \in \{1, \dots, n\} \tag{2}$$

gilt.
Hinweis: Es gilt $A_\lambda = \lambda E_n + A_0$.

Aufgabe 78: (20 Punkte)
Berechne e^A für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 6 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & 7 & 7 & -4 \\ -2 & 8 & 7 & -4 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: Verfahre analog zu Aufgabe 70 mithilfe der Jordan-Normalform anstelle der Diagonalmatrix D. Verwende dabei Aufgabe 77.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 23.05.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.