Übungsblatt 5 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 72 (10 Punkte).
Es sei V ein $n-$dimensionaler $K-$Vektorraum, $F : V \to V$ und $G : V \to V$ seien $K-$linear. Zeige: $\lambda \in K$ ist genau dann ein Eigenwert von $F \circ G$, wenn es Eigenwert von $G \circ F$ ist.

Aufgabe 73 (10 Punkte).
Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) A ist nilpotent, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0$.

b) $A^n = 0$.

c) In einer geeigneten Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^n$ ist die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ der zu A gehörigen linearen Abbildung $\begin{array}{rccc} F_A : & \mathbb{C}^n & \to & \mathbb{C}^n \\ & \underline{x} & \mapsto & A\underline{x} \end{array}$ eine rechte obere Dreiecksmatrix, deren Diagonaleinträge alle gleich Null sind.

d) Das charakteristische Polynom von A ist $p_A(X) = (-1)^n X^n$.

Aufgabe 74: (10 Punkte)
Gib eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}^3$ an, so daß die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F_A)$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine rechte obere Dreiecksmatix ist.

Aufgabe 75: (10 Punkte)
Bestimme das charakteristische Polynom und die Eigenwerte der Matrix

$$J = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}$$

mit ihren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten sowie die zugehörigen verallgemeinerten Eigenräume.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 16.05.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.