Übungsblatt 4 zu Mathematik II für Physiker

Seien $n \in \mathbb{N}$, $A \in M(n \times n, \mathbb{C})$. Wir definieren

$$\mathrm{e}^A := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{A^j}{j!}. \tag{1}$$

Aufgabe 69 (10 Punkte).
Beweise, dass die Reihe (1) konvergiert im normierten Vektorraum $\big(M(n \times n, \mathbb{C}), \|\cdot\|_{1,1}\big)$ (siehe Aufgabe 61).
Hinweis: Beweise, dass die Ungleichung $\|AB\|_{1,1} \le \|A\|_{1,1}\|B\|_{1,1}$ für alle $A, B \in M(n \times n, \mathbb{C})$ gilt. Man darf ferner ohne Beweis verwenden, daß $(M(n \times n, \mathbb{C}, \|\cdot\|_{1,1})$ vollständig ist.

Aufgabe 70 (20 Punkte).
Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

b) Finde eine invertierbare Matrix $U \in M(3, \mathbb{C})$ und eine Diagonalmatrix D, sodass

$$A = U^{-1}DU \tag{2}$$

gilt.

c) Berechne e^A mithilfe von (2).

Aufgabe 71 (10 Punkte).
Für

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

berechne

$$\cos B := \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}B} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}B}}{2}.$$

Hinweis: Finde B^3.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 9.05.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.