Übungsblatt 3 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 65 (10 Punkte).
Für $a, b, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ mit $b \neq a^2$ betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$x_{n+2} := 2ax_{n+1} - bx_n, \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

a) Finde zwei Werte von λ, sodass $x_n := \lambda^{n-1}$ die Gleichung (1) für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllen.

b) Beweise, dass für beliebige $x_0, x_1 \in \mathbb{C}$ zwei passende Koeffizienten c_1, $c_2 \in \mathbb{C}$ existieren, sodass

$$x_n = c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

gilt, wobei λ_1 und λ_2 die Zahlen aus der Teilaufgabe (a) sind.

c) Berechne x_{2018} für den Fall $a := 1$, $b := 2$, $x_1 := 2$, $x_2 := 0$.

Aufgabe 66 (10 Punkte).
Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b, c \in \mathbb{C}$ mit $a^2 \neq 4bc$ berechne die Determinante der Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} a, & \text{falls } j = i; \\ b, & \text{falls } j = i+1; \\ c, & \text{falls } j = i-1; \\ 0, & \text{sonst}; \end{cases} \quad \text{also} \quad A := \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c & a & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & b \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Hinweis: Benütze Aufgabe 65.

Aufgabe 67 (10 Punkte).
Für $i, j, k, l, m, n \in \mathbb{N}$ seien $A \in M(k \times m, K)$, $B \in M(k \times n, K)$, $C \in M(l \times m, K)$, $D \in M(l \times n, K)$, $E \in M(m \times i, K)$, $F \in M(m \times j, K)$, $G \in M(n \times i, K)$, $H \in M(n \times j, K)$ beliebige Matrizen. Beweise, dass für die Blockmatrizen die Multiplikationsregel

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A\cdot E + B\cdot G & A\cdot F + B\cdot H \\ \hline C\cdot E + D\cdot G & C\cdot F + D\cdot H \end{array}\right)$$

gilt (wobei im jedem Produkt die Ordnung der Faktoren wichtig ist!).

Aufgabe 68 (10 Punkte).
Es seien $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times m, K)$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$\det(E_n - BA) = \det(E_m - AB).$$

Hinweis: Betrachte die beiden Blockmatrizen

$$F = \left(\begin{array}{c|c} E_n & 0 \\ \hline A & E_m \end{array}\right), \qquad G = \left(\begin{array}{c|c} E_n & -B \\ \hline -A & E_m \end{array}\right) \in M_{n+m}(K).$$

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 2.05.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.