Ferienblatt zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 100 (15 Punkte).
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $A_n \subseteq X$. Für $n \in \mathbb{N}$, gelte:

a) $A_n \neq \emptyset$,

b) A_n abgeschlossen,

c) $A_{n+1} \subseteq A_n$,

d) $\delta(A_n) := \left\{ \begin{array}{ll} \sup\{d(x,y) : \ x, y \in A_n\}, & \text{falls } \{d(x,y) : \ x, y \in A_n\} \text{ nach oben beschränkt}, \\ \infty, & \text{sonst}, \end{array} \right\}$
erfüllt $\delta(A_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Zeige, daß es ein $a \in X$ gibt mit $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Aufgabe 101: (5 Punkte) Bestimme mittels des Bisektionsferfahrens bei einem maximalen Fehler von $\frac{1}{8}$ eine approximative Nullstelle der Funktion $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^5 + 4x^2 - 2 \end{array}$.

Aufgabe 102: (10 Punkte)
Versehe den Vektorraum $M_n(\mathbb{C})$ aller $n \times n-$Matrizen mit der $||\cdot||_{1,1}-$Norm wie in Aufgabe 61; für $A = (a_{kl})_{1\leq k,l\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ gilt also

$$\|A\|_{1,1} = \sum_{k=1}^{n} \max\{|a_{kl}| : l = 1, ..., n\}.$$

Zeige, daß die Determinante $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ eine stetige Abbildung ist.

Aufgabe 103: (10 Punkte) Sei $\mathbb{R}$ mit der Standardtopologie versehen. Zeige, dass die Funktion

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

stetig ist.

Aufgabe 104 (15 Punkte)
Es seien $(X, \mathcal{O}_x)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ zusammenhängende topologische Räume. Zeige, daß auch $X \times Y$ (bezüglich der Produkttopologie) zusammenhängend ist.

Aufgabe 105: (15 Punkte) Die Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ seien mit der ihren Standardtopologien versehen. Zeige, dass $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}$ nicht homöomorph sind.
Hinweis: Betrachte die Komplemente von einpunktigen Mengen.

Aufgabe 106: (15 Punkte) Zeige, daß das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{8}(1-x)y - \dfrac{1}{4}y^2 - x & = & -\dfrac{7}{8} \\ (\dfrac{1}{8}(1-x)^2 - 1)y + \dfrac{1}{4}xy & = & 0 \end{array}$$

auf der Menge $M = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}] \times [-1, 1]$ genau eine Lösung besitzt, mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes. Von $(x, y) = (1, 0)$ startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als 10^{-6} unterscheiden. Berechne die Approximation nach 2 Iterationschritten. Hinweis: Verwenden der Maximumsnorm kann die Rechnungen vereinfachen.

Aufgabe 107: (10 Punkte) Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein kompakter topologischer Raum, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein hausdorffscher topologischer Raum und $f : X \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, daß dann f ein Homöomorphismus ist.

Aufgabe 108: (20 Punkte) Auf $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ sei

- $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von $z \in \mathbb{C}$, wenn es ein $r = r(z, U) > 0$ gibt, so daß

  $$\{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r(z, U)\} \subseteq U$$

  ist.

- $U \subseteq \hat{\mathbb{C}}$ eine Umgebung von ∞, wenn $\infty \in U$ und wenn es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{C}$ (bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$) gibt, so daß $\mathbb{C} \backslash K \subseteq U$ ist.

Definiere nun

$$\mathcal{O} := \{V \subseteq \hat{\mathbb{C}} : \text{ Für jedes } z \in V \text{ ist } V \text{ eine Umgebung von } z \ \}$$

und zeige:

a) $(\hat{\mathbb{C}}, \mathcal{O})$ ist ein kompakter topologischer Raum.

b) Wird $S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ mit der Relativtopologie (der Produkttopologie auf $\mathbb{R}^3$) versehen, so ist
$$\begin{aligned} f : S^2 &\to \hat{\mathbb{C}} \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \begin{cases} \infty & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 1) \\ \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 1) \end{cases} \end{aligned}$$
ein Homöomorphismus.
Hinweis: $$\begin{aligned} \mathbb{C} &\to S^2 \\ x_1 + ix_2 &\mapsto \frac{1}{x_1^2 + x_2^2 + 1}(2x_1, 2x_2, x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{aligned}$$ könnte hilfreich sein.

c) Zeichne für $x_2 = 0$ die Punkte $(x_1, 0, x_3) \in S^2$ und $f(x_1, 0, x_3)$ in einem $x_1 - x_3$ Koordinatensystem. Wie kann man sich durch diese Zeichnung die Abbildung f aus dem Teil b) ganz anschaulich vorstellen?

Aufgabe 109: (10 Punkte) Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und $T : X \to X$ eine Abbildung mit $d(T(x), T(y)) < d(x, y)$ für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Zeige: T hat genau einen Fixpunkt $a \in X$.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Montag, den 15.10.2018, 14 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.