Übungsblatt 12 zu Mathematik II für Physiker

Alle metrische Räumen, die in diesem Übungsblatt betrachtet werden, sind mit der Standardtopologie ausgestattet.

Aufgabe 96 (10 Punkte).
Beweise, dass die Funktion

$$\begin{aligned} A &: \mathbb{R}^2 \to \big(M(2\times 2,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{1,1}\big) \\ A &: (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} \sin(e^{x-y^2}) & (1+e^y)^{-1} \\ x^2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stetig ist.

Aufgabe 97:
Auf einer Pizza sind Käse und Tomatensauce ungleichmäßig verteilt.

a) **(10 Punkte)** Beweise, dass es ein gerader Schnitt durch das Zentrum der Pizza existiert, sodass die beiden entstandenen Pizzastücke gleiche Menge Käse (nach Gewicht) beinhalten.

b) **(10 Bonuspunkte)** Beweise, dass es ein gerader Schnitt durch die Pizza existiert, sodass die beiden entstandenen Pizzastücke sowohl gleiche Menge Käse als auch gleiche Menge Tomatensauce (nach Gewicht) beinhalten.

Aufgabe 98: (10 Punkte).
Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert eine Umgebung $U_z \subseteq \mathbb{C}$ von z, sodass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3x-1)^{2n}$$

für jedes $x \in U_z$ gegen eine Zahl $f(x) \in \mathbb{C}$ konvergiert, und

$$\begin{aligned} f &: U_z \to \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

eine stetige Funktion ist?

Aufgabe 99: (10 Punkte).

a) Beweise, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} \sqrt{\cdot} &: [0,+\infty[\to [0,+\infty[\\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

stetig ist.

b) Für $a, b : \mathbb{R} \to [0,\infty[$ seien $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (mit $\lambda_1 \leq \lambda_2$) zwei stetige Funktionen, die die Eigenwerte der matrixwertigen Funktion

$$\begin{aligned} F &: \mathbb{R} \to M(2\times 2,\mathbb{R}) \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ b(x) & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

liefern. Beweise, dass die Funktionen a und b stetig sind.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 11.07.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.