

## Übungsblatt 11 zu Mathematik II für Physiker

Alle metrische Räumen, die in diesem Übungsblatt betrachtet werden, sind mit der Standardtopologie ausgestattet.

### Aufgabe 92 (10 Punkte).

Finde alle  $x \in \mathbb{R}$ , für welche die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 - x^2, & \text{für } x \leq 1, \\ x - 1, & \text{für } x \in ]1, 2[, \\ 1 - 2/x, & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

stetig in  $x$  ist.

### Aufgabe 93: (10 Punkte).

Beweise, dass für  $d \in \mathbb{N}$  die Funktion

$$g : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d,$$

$$g : x \mapsto \|x\|^{-1}x$$

stetig ist, wobei  $\|\cdot\|$  die vom Standardskalarprodukt induzierte Norm in  $\mathbb{R}^d$  bezeichnet. Beweise ferner, dass  $g$  nicht auf stetige Weise nach  $\mathbb{R}^d$  fortgesetzt werden kann, d.h. es gibt keine stetige Funktion  $\tilde{g} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  mit  $\tilde{g}(x) = g(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

### Aufgabe 94: (10 Punkte).

Mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes beweise, dass das Polynom

$$P(x) := x^5 + 6x - 1$$

genau eine Nullstelle im reellen Intervall  $[0, 1]$  hat. Beweise ferner, dass die Nullstelle keine rationale Zahl sein kann (Man darf ohne Beweis verwenden, dass jede natürliche Zahl, die größer als 1 ist, sich eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben lässt). Warum kann man nicht den Banachschen Fixpunktsatz auf  $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$  anwenden?

### Aufgabe 95: (10 Punkte).

Zeige mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, dass das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \frac{1}{5}xy^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \\ \frac{y^2}{6} - \frac{x^4}{10} - y = 0 \end{cases}$$

auf der Menge  $M = [-1, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  genau eine Lösung besitzt. Von  $(x, y) = (1, 0)$  startend, wieviele Iterationen sind notwendig, um sicher zu sein, dass sich die Koordinaten der approximativen und tatsächlichen Lösung um weniger als  $10^{-6}$  unterscheiden. Berechne die Approximation mit Startwert  $(1, 0)$  nach 2 Iterationschritten.

**Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 04.07.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.**