Übungsblatt 10 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 88 (10 Punkte).

Seien

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[,\ \varphi \in]0,\pi[\}, \\ M_2 &:= \{re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r \in]0,1[\cap \mathbb{Q},\ \varphi \in]\pi, 2\pi[\}, \\ M &:= M_1 \cup M_2. \end{aligned}$$

In der Standardtopologie auf $\mathbb{C}$ bestimme den offenen Kern, den Rand und den Abschluß von M.

Aufgabe 89: (10 Punkte).

a) Beweise, dass die Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$ ist, in welcher für alle $\alpha \in \mathbb{Q}$ die Halbachsen $]-\infty, \alpha[$ und $]\alpha, +\infty[$ offen sind.

b) Finde die kleinste (gröbste) Topologie auf $\mathbb{R}$, in welcher alle zweielementige Teilmengen von $\mathbb{R}$, d.h. $\{\{x,y\} : x, y \in \mathbb{R},\ x \neq y\}$, offen sind.

Aufgabe 90: (10 Punkte).
Auf $\mathbb{S}^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ betrachte die Topologie $\mathcal{T}$ mit der Basis

$$\mathcal{B} := \Big\{ \{e^{i\varphi} : \varphi \in]\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta[\} :\ \varphi_0 \in \mathbb{R},\ \delta > 0 \Big\}.$$

Beweise, dass $\mathcal{T} = \mathcal{O}_{\mathbb{S}^1}$ gilt, wobei die rechte Seite die Relativtopologie auf $\mathbb{S}^1$ bezüglich der Standardtopologie $\mathcal{O}$ auf $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Aufgabe 91: (10 Punkte).
Sei $A := \{a, b, c\}$ eine dreielementige Menge. Beweise, dass

$$\mathcal{O} := \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\}$$

eine Topologie auf A ist. Finde alle $x \in A$, für welche die Identitätsabbildung zwischen zwei topologischen Räumen

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A : (A, \mathcal{O}) &\to \big(A, \mathcal{P}(A)\big) \\ y &\mapsto y \end{aligned}$$

stetig in x ist.

Abgabe je Zweier- bzw. Dreiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 27.06.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibliothek, Theresienstraße 1. Stock.