Übungsblatt 1 zu Mathematik II für Physiker

Aufgabe 58 (10 Punkte)
Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ seien

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \begin{array}{rcl} p : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array} : a_0, ..., a_n \in \mathbb{C} \right\}$$

der Raum aller Polynome vom Grad $\leq n$ und $\mathcal{B}_n := \{H_0, H_1, ..., H_n\} \subset \mathcal{P}_n$ mit

$$H_0(z) := 1, \; H_j(z) := z^j - jz^{j-1}, \; j = 1, \ldots, n, \quad z \in \mathbb{C}.$$

a) Zeige: $\mathcal{B}_n$ bildet eine Basis von $\mathcal{P}_n$.

b) Beweise, dass es genau eine lineare Abbildung $L_n : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-2}$ existiert mit

$$\begin{aligned} &L_n : H_0(z) \mapsto 0; \\ &L_n : H_1(z) \mapsto 0; \\ &L_n : H_j(z) \mapsto j(j-1)z^{j-2} \qquad \text{für alle } j = 2, \ldots, n, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

c) Bestimme die darstellende Matrix $M^{\mathcal{B}_3}_{\mathcal{B}_1}(L_3)$.

Aufgabe 59 (10 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}_0$ bestimme den Rang der Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 0, & \text{falls } i + j \text{ ungerade;} \\ (i+j)/2, & \text{falls } i + j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Aufgabe 60: (10 Punkte)
Sei $A \in M(4 \times 5, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ -2 & -5 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix},$$

und $U := \{\underline{b} \in \mathbb{R}^4 : \text{das Gleichungssystem } A\underline{x} = \underline{b} \text{ ist lösbar nach } \underline{x} \in \mathbb{R}^5\}$. Zeige, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^4$ ist und bestimme $\dim U$.

Aufgabe 61: (10 Punkte) Es sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Wie schon im letzten Semester (Beispiel 5.4.5) betrachten wir für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rcl} \| \cdot \|_1 : \mathbb{K}^n & \to & [0, \infty[\\ \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \sum_{j=1}^{n} |x_j| \end{array}$$

und definieren für $m, n \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \| \cdot \|_{1,1} : M(m \times n, \mathbb{K}) & \to & [0, \infty[\\ A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,n}} & \mapsto & \|A\|_{1,1} := \sum_{i=1}^{m} \max_{j=1,..,n} |a_{ij}| \end{array} .$$

Beweise folgende Aussagen:

(a) $\|\cdot\|_{1,1}$ ist eine Norm auf $M(m \times n, \mathbb{K})$.

(b) Für alle $\underline{x} \in \mathbb{K}^n$ und $A \in M(m \times n, \mathbb{K})$ gilt: $\|A\underline{x}\|_1 \leq \|A\|_{1,1}\|\underline{x}\|_1$.

Abgabe je Zweiergruppe eine Lösung bis Mittwoch, den 18.04.2018, 15 Uhr im Übungskasten Nummer 19 vor der Bibiliothek, Theresienstraße 1. Stock.