F Reduzierende Unterräume

Definition F.1. *Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Ein abgeschlossener Unterraum $X \subseteq \mathcal{H}$ heißt* **invariant unter** T*, wenn $T[X \cap \mathcal{D}(T)] \subseteq X$ gilt. In diesem Fall ist durch*

$$\begin{array}{rcl} T|_X : X \cap \mathcal{D}(T) & \to & X \\ \varphi & \mapsto & T[\varphi] \end{array}$$

ein Operator im Hilbertraum X definiert. Sind X und $X^\perp$ invariant unter T und gilt

$$\mathcal{D}(T) = (X \cap \mathcal{D}(T)) + (X^\perp \cap \mathcal{D}(T)), \tag{F.1}$$

so heißt X ein **reduzierender Unterraum von** T.

Satz F.2. *Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ein Operator und $X \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum von $\mathcal{H}$, dann gilt:*

a) X ist genau dann reduzierender Unterraum von T, wenn für die orthogonale Projektion $P_X : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ auf X gilt:

$$P_X T \subseteq T P_X. \tag{F.2}$$

b) Ist T dicht definiert und X reduzierender Unterraum von T, dann ist X auch reduzierender Unterraum von T^* und $(T|_X)^* = T^*|_X$, $(T|_{X^\perp})^* = T^*|_{X^\perp}$.

c) Ist T dicht definiert und abgeschlossen, so ist X genau dann reduzierender Unterraum von T, wenn X reduzierender Unterraum von T^* ist.

Beweis.

a) „$\Rightarrow$“: Ist X reduzierender Unterraum von T, dann ist

$$\mathcal{D}(P_X T) = \mathcal{D}(T) = (X \cap \mathcal{D}(T)) + (X^\perp \cap \mathcal{D}(T)) \subseteq (X \cap \mathcal{D}(T)) + X^\perp = \mathcal{D}(T P_X).$$

Wegen $\mathcal{D}(T) = (X \cap \mathcal{D}(T)) + (X^\perp \cap \mathcal{D}(T))$ hat daher jedes $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ eine Zerlegung der Form $\varphi = \phi + \phi^\perp$ mit $\phi \in X \cap \mathcal{D}(T)$ und $\phi^\perp \in X^\perp \cap \mathcal{D}(T)$, also ist $\phi = P_X[\varphi]$ und $\phi^\perp = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi]$ und damit folgt

$$\begin{array}{rcl} T[P_X[\varphi]] & = & T[P_X[\phi + \phi^\perp]] = T[P_X[\phi]] = T[\phi] = P_X[T[\phi]] \\ & = & P_X[T[\phi] + T[\phi^\perp]] = P_X[T[\varphi]] \end{array}$$

„$\Leftarrow$“: Ist umgekehrt $P_X T \subseteq T P_X$, so ist

$$P_X[\mathcal{D}(T)] \subseteq \mathcal{D}(T) \quad \text{und} \quad (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\mathcal{D}(T)] \subseteq \mathcal{D}(T)$$

– denn für $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ ist $P_X[T[\varphi]] \in \mathcal{H}$ und $P_X[T[\varphi]] = T[P_X[\varphi]]$ also $P_X[\varphi] \in \mathcal{D}(T)$ und ebenso $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[T[\varphi]] = T[\varphi] - T[P_X[\varphi]] = T[\varphi - P_X[\varphi]] \in \mathcal{H}$, also $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi] = \varphi - P_X[\varphi] \in \mathcal{D}(T)$. Damit hat jedes $\varphi \in \mathcal{D}(T)$ die Form

$\varphi = P_X[\varphi] + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi]$ mit $P_X[\varphi] \in X \cap \mathcal{D}(T)$ und $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi] \in X^\perp \cap \mathcal{D}(T)$; es gilt also (F.1). Für $\varphi \in X \cap \mathcal{D}(T)$ gilt

$$T[\varphi] = T[P_X[\varphi]] = P_X[T[\varphi]] \in X$$

und für $\varphi^\perp \in X^\perp \cap \mathcal{D}(T)$ gilt

$$T[\varphi^\perp] = T[(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi^\perp]] = (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[T[\varphi^\perp]] \in X^\perp,$$

dh. X ist reduzierender Unterraum von T.

b) Ist X reduzierender Unterraum für T und $\psi \in \mathcal{D}(T^*)$, so gilt für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(T)$

$$\langle T[\varphi], P_X[\psi]\rangle = \langle P_X[T[\varphi]], \psi\rangle = \langle T[P_X[\varphi]], \psi\rangle = \langle P_X[\varphi], T^*[\psi]\rangle$$

dh. $P_X[\psi] \in \mathcal{D}(T^*)$ und $T^*[P_X[\psi]] = P_X[T^*[\psi]] \in X$ also auch $T^*[X \cap \mathcal{D}(T^*)]] \subseteq X$. Mit $\psi, P_X[\psi] \in \mathcal{D}(T^*)$ ist auch $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\psi] \in \mathcal{D}(T^*)$ und

$$\begin{aligned} T^*[(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\psi]] &= T^*[\psi] - T^*[P_X[\psi]] = T^*[\psi] - P_X[T^*[\psi]] \\ &= (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[T^*[\psi]] \in X^\perp \end{aligned}$$

also $T^*[X^\perp \cap \mathcal{D}(T^*)] \subseteq X^\perp$ und jedes $\psi \in \mathcal{D}(T^*)$ schreibt sich als

$$\psi = P_X[\psi] + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\psi] \in (X \cap \mathcal{D}(T^*)) + (X^\perp \cap \mathcal{D}(T^*))$$

dh. X ist reduzierender Unterraum zu T^*. Ist $\Psi \in X \cap \mathcal{D}(T^*) = \mathcal{D}(T^*|_X)$, so ist $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle \Psi, T[\varphi]\rangle \end{array}$ stetig, dann ist die Einschränkung $\begin{array}{ccc} X \cap \mathcal{D}(T) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle \Psi, (T|_X)[\varphi]\rangle \end{array}$ stetig und damit auch $\Psi \in \mathcal{D}((T|_X)^*)$, das zeigt also $\mathcal{D}(T^*|_X) \subseteq \mathcal{D}((T|_X)^*)$ und die stetigen Fortsetzungen erfüllen $\langle T^*[\Psi], \varphi\rangle = \langle (T|_X)^*[\Psi], \varphi\rangle$, also ist $T^*|_X \subseteq (T|_X)^*$. Ist $\Psi \in \mathcal{D}((T|_X)^*) \subseteq X$, dann ist für $\varphi \in \mathcal{D}(T)$

$$\begin{aligned} \langle \Psi, T[\varphi]\rangle &= \langle \Psi, T[P_X[\varphi] + (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi]]\rangle \\ &= \langle \Psi, T[P_X[\varphi]]\rangle + \langle \Psi, (\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[T[\varphi]]\rangle = \langle \Psi, (T|_X)[P_X[\varphi]]\rangle \\ &= \langle (T|_X)^*[\Psi], P_X[\varphi]\rangle \end{aligned}$$

also ist $\begin{array}{ccc} \mathcal{D}(T) & \to & \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \langle \Psi, T[\varphi]\rangle \end{array}$ stetig, dh. $\Psi \in \mathcal{D}(T^*)$ und damit $(T|_X)^* = T^*|_X$. Analog folgt die Behauptung für $X^\perp$.

c) Ist T dicht definiert und abgeschlossen, so gilt $T = \overline{T} = (T^*)^*$. Ist X reduzierender Unterraum von T, dann ist X nach (b) reduzierender Unterraum von T^*. Ist X reduzierender Unterraum von T^*, dann ist X nach (b) auch reduzierender Unterraum von $(T^*)^* = \overline{T} = T$.

$\square$

Satz F.3. *Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $E_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(\mathcal{H})$ das Spektralmaß zu T, $X \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und P_X die orthogonale Projektion auf X, dann sind äquivalent:*

a) X ist reduzierender Unterraum für T.

b) Für alle $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$P_X \circ E_T(]-\infty, b]) = E_T(]-\infty, b]) \circ P_X. \tag{F.3}$$

c) Für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt:

$$P_X \circ E_T(B) = E_T(B) \circ P_X. \tag{F.4}$$

Beweis.

a)⇒b) Ist $z \in \rho(T)$ und $\varphi \in X$, so schreibe $(T-z)^{-1}[\varphi] = \psi + \psi^\perp$ mit $\psi = P_X[(T-z)^{-1}[\varphi]] \in X$ und $\psi^\perp = (\mathrm{id}_\mathcal{H} - P_X)[(T-z)^{-1}[\varphi]] \in X^\perp$. Dann gilt:

$$\varphi = (T-z)[(T-z)^{-1}[\varphi]] = (T-z)[\psi + \psi^\perp] = (T-z)[\psi] + (T-z)[\psi^\perp] \tag{F.5}$$

Da X reduzierender Unterraum von T ist, gilt

$$(T-z)[\psi^\perp] = (T-z)[(\mathrm{id}_\mathcal{H} - P_X)[\psi^\perp]] = (\mathrm{id}_\mathcal{H} - P_X)[(T-z)[\psi^\perp]] \in X^\perp$$

und da $\mathcal{H} = X \oplus X^\perp$ eine orthogonale Zerlegung ist, folgt $(T-z)[\psi^\perp] = \mathbf{0}$ aus (F.5) und $\varphi \in X$. Da für $z \in \rho(T)$ der Operator $T - z$ bijektiv ist, folgt daraus $\psi^\perp = \mathbf{0}$ und damit $(T-z)^{-1}[X] \subseteq X$. Analog folgt $(T-z)^{-1}[X^\perp] \subseteq X^\perp$ und mit $\mathcal{D}((T-z)^{-1}) = \mathcal{H} = X \oplus X^\perp$ folgt, daß X für jedes $z \in \rho(T)$ ein reduzierender Unterraum von $(T-z)^{-1}$ ist. Nach Satz F.2 gilt dann $P_X(T-z)^{-1} = (T-z)^{-1}P_X$ und daher erhält man mit der Stoneschen Formel

$$\begin{aligned}
&\langle P_X[\varphi], E_T(]-\infty, b])[\phi]\rangle = \langle \varphi, P_X[E_T(]-\infty, b])[\phi]]\rangle \\
&= \lim_{\delta\searrow 0}\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{b+\delta} \Big\langle \varphi, P_X\left[\big((T-t-i\varepsilon)^{-1} - (T-t+i\varepsilon)^{-1}\big)[\phi]\right] \Big\rangle dt \\
&= \lim_{\delta\searrow 0}\lim_{\varepsilon\searrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{b+\delta} \Big\langle \varphi, \big((T-t-i\varepsilon)^{-1} - (T-t+i\varepsilon)^{-1}\big)[P_X[\phi]] \Big\rangle dt \\
&= \langle \varphi, E_T(]-\infty, b])[P_X[\phi]]\rangle
\end{aligned}$$

für alle $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$, also

$$P_X \circ E_T(]-\infty, b]) = E_T(]-\infty, b]) \circ P_X$$

b)⇒c) Für jedes $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$ stimmen nach Voraussetzung die beiden endlichen, komplexen Maße $\begin{array}{rcl}\nu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ B & \mapsto & \langle \phi, P_X[E_T(B)[\varphi]]\rangle\end{array}$ und $\begin{array}{rcl}\eta : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ B & \mapsto & \langle \phi, E_T(B)[P_X[\varphi]]\rangle\end{array}$ auf dem durchschnittstabilen Erzeugendensystem $\{]-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$ von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ überein, also gilt $\nu = \eta$ und damit folgt $P_X \circ E_T(B) = E_T(B) \circ P_X$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

c)⇒a) Ist $\varphi \in \mathcal{D}(T)$, also $\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^2 d\mu_{\varphi,\varphi}(t) < \infty$ und wegen

$$\mu_{P_X[\varphi],P_X[\varphi]}(B) = \|E_T(B)[P_X[\varphi]]\|^2 = \|P_X[E_T(B)[\varphi]]\|^2 \leq \|E_T(B)[\varphi]\|^2 = \mu_{\varphi,\varphi}(B)$$

ist auch $\int\limits_{\mathbb{R}} |t|^2 d\mu_{P_X[\varphi],P_X[\varphi]} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |t|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} < \infty$ und daher $P_X[\varphi] \in \mathcal{D}(T)$. Ist noch $\phi \in \mathcal{H}$, dann gilt $\mu_{P_X[\phi],\varphi}(B) = \langle P_X[\phi], E_T(B)[\varphi]\rangle = \langle \phi, P_X[E_T(B)[\varphi]]\rangle = \langle \phi, E_T(B)[P_X[\varphi]]\rangle = \mu_{\phi,P_X[\varphi]}(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ und daher gilt nach dem Spektralsatz

$$\langle \phi, P_X[T[\varphi]]\rangle = \langle P_X[\phi], T[\varphi]\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} t d\mu_{P_X[\phi],\varphi}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}} t d\mu_{\phi,P_X[\varphi]}(t) = \langle \phi, T[P_X[\varphi]]\rangle$$

also ist $P_X \circ T \subseteq T \circ P_X$ und X ein reduzierender Unterraum zu T nach Satz F.2.

□

Lemma F.4. *Es sei $A : \mathcal{D}(A) \to \mathcal{H}$ ein selbstadjungierter Operator mit Spektralmaß $E_A : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(\mathcal{H})$ und $X \subseteq \mathcal{H}$ ein reduzierender Unterraum für A mit orthogonaler Projektion P_X. Dann ist $A|_X : \mathcal{D}(A) \cap X \to X$ selbstadjungiert und*

$$\begin{array}{rcl} E_{A|_X} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & L(X) \\ B & \mapsto & E_A(B)|_X \end{array}$$

das Spektralmaß zu $A|_X$.

Satz F.5. *Es sei $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ selbstadjungiert und $X \subseteq \mathcal{H}$ ein reduzierender Unterraum für T. Dann ist X auch reduzierender Unterraum zu $f(T)$ für meßbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

Beweis. Es sei $E_T : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to L(\mathcal{H})$ das Spektralmaß zu T und zu $\varphi, \phi \in \mathcal{H}$ sei $\begin{array}{rcl} \mu_{\phi,\varphi} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{C} \\ B & \mapsto & \langle \phi, E_T(B)[\varphi]\rangle \end{array}$ das zugehörige komplexe Maß. Ist $\varphi \in \mathcal{D}(f(T))$, dann ist $\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} < \infty$ und wegen

$$\mu_{P_X[\varphi],P_X[\varphi]}(B) = \|E_T(B)[P_X[\varphi]]\|^2 = \|P_X[E_T(B)[\varphi]]\|^2 \leq \|E_T(B)[\varphi]\|^2 = \mu_{\varphi,\varphi}(B)$$

folgt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{P_X[\varphi],P_X[\varphi]} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} < \infty,$$

also ist $P_X[\varphi] \in \mathcal{D}(f(T))$. Analog folgt auch $(\mathrm{id}_{\mathcal{H}} - P_X)[\varphi] \in \mathcal{D}(f(T))$.

Ist $g = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \mathbf{1}_{B_k}$ mit $\lambda_1, ..., \lambda_N \in \mathbb{C}$ und $B_1, ..., B_N \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ eine einfache Funktion, dann ist $g(T) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_T(B_k)$, also gilt nach Satz F.3

$$g(T) \circ P_X = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_T(B_k) \right) \circ P_X = P_X \circ \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k E_T(B_k) \right) = P_X \circ g(T),$$

dh. für einfache Funktionen g ist $g(T)[X] \subseteq X$.
Ist nun allgemeiner $h : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ meßbar, $\varphi \in \mathcal{D}(h(T)) \cap X$, also $\int_{\mathbb{R}} |h|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} < \infty$, so wähle eine Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen mit $g_n(x) \nearrow h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da $h \in L^2(\mu_{\varphi,\varphi})$ Majorante ist, gilt dann

$$\|h(T)[\varphi] - g_n(T)[\varphi]\|^2 = \|(h - g_n)(T)[\varphi]\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |h - g_n|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{F.6}$$

Wegen $\varphi = P_X[\varphi] \in \mathcal{D}(h(T)) \cap X$ ist $g_n(T)[\varphi] \in X$ und da X ein abgeschlossener Unterraum ist, folgt $h(T)[\varphi] \in X$ aus (F.6).
Ist nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ meßbar, $\varphi \in \mathcal{D}(f(T)) \cap X$, so ist wegen

$$f(x) = (\operatorname{Re} f)_+(x) - (\operatorname{Re} f)_-(x) + i(\operatorname{Im} f)_+(x) - i(\operatorname{Im} f)_-(x)$$

und $(\operatorname{Re} f)_+(x), (\operatorname{Re} f)_-(x), (\operatorname{Im} f)_+(x), (\operatorname{Im} f)_-(x) \leq |f(x)|$ auch

$$\int_{\mathbb{R}} |h|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} \leq \int_{\mathbb{R}} |f|^2 d\mu_{\varphi,\varphi} < \infty,$$

also $\varphi \in \mathcal{D}(h(T))$ für $h = (\operatorname{Re} f)_+$, $h = (\operatorname{Re} f)_-$, $h = (\operatorname{Im} f)_+$ und $h = (\operatorname{Im} f)_-$. Der eben bewiesene Teil zeigt dann $(\operatorname{Re} f)_+(T)[\varphi], (\operatorname{Re} f)_-(T)[\varphi], (\operatorname{Im} f)_+(T)[\varphi], (\operatorname{Im} f)_-(T)[\varphi] \in X$. Nach Lemma E.9 gilt

$$f(T)[\varphi] = \left(\overline{(\operatorname{Re} f)_+(T) - (\operatorname{Re} f)_-(T) + i(\operatorname{Im} f)_+(T) - i(\operatorname{Im} f)_-(T)} \right) [\varphi] \in X,$$

denn X ist ein abgeschlossener Unterraum. Analog ist $f(T)[\varphi] \in X^\perp$ für $\varphi \in \mathcal{D}(f(T)) \cap X^\perp$ und damit ist X reduzierender Unterraum für $f(T)$. □