

# Analysis III

## TUTORIUM 9

1. Beweisen Sie für  $x, y \geq 0$  und  $1 \leq p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  die Ungleichung

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Leiten Sie dazu aus der Funktion  $\eta \mapsto (1 + \eta)^{\frac{1}{p}}$  die *Ungleichung von Bernoulli*  $(1 + \eta)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\eta}{p} + 1$  her.

2. Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum und  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine messbare Abbildung. Wir definieren

$$\|f\|_{\infty} := \inf\{\lambda \in [0, \infty] : |f| \leq \lambda \text{ fast überall}\}$$

und nennen die Funktion  $f$  *wesentlich beschränkt*, wenn  $\|f\|_{\infty} < \infty$ . Die Menge aller wesentlich beschränkten reellwertigen Funktionen bezeichnen wir mit  $\mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu)$  oder kurz mit  $\mathcal{L}^{\infty}$ .

Zeigen Sie, dass  $\mathcal{L}^{\infty}$  ein Vektorraum ist, auf dem  $\|\cdot\|_{\infty}$  eine Halbnorm definiert. Zeigen Sie außerdem, dass

$$\|f\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ fast überall.}$$

3. Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Zeigen Sie: Ist  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $\mathcal{L}^{\infty}$  bezüglich der Halbnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$ , so gibt es eine Funktion  $f \in \mathcal{L}^{\infty}$  mit  $f_n - f \rightarrow 0$  punktweise fast überall (sogar gleichmäßig fast überall) und  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$ . Zeigen Sie zuletzt, dass die fast überall verschwindenden Funktionen einen Untervektorraum von  $\mathcal{L}^{\infty}$  bilden.

Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein Maßraum. Wir definieren den Vektorraum

$$L^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) / \{f \in \mathcal{L}^{\infty}(X, \mathcal{A}, \mu) : \|f\|_{\infty} = 0\},$$

den wir auch kurz als  $L^{\infty}$  bezeichnen. Dann ist die von der Halbnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$  induzierte Abbildung  $\|\cdot\|_{\infty} : L^{\infty} \rightarrow [0, \infty)$  eine vollständige Norm, und somit  $(L^{\infty}, \|\cdot\|_{\infty})$  ein Banachraum.

4. Sei  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  ein endlicher Maßraum und  $f \in \mathcal{L}^{\infty}$ . Zeigen Sie, dass dann  $f \in \mathcal{L}^p$  für alle  $1 \leq p < \infty$  und  $\|f\|_p \rightarrow \|f\|_{\infty}$  für  $p \rightarrow \infty$  gilt. (Die Definition von  $(\mathcal{L}^p, \|\cdot\|_p)$  finden Sie auf dem aktuellen Übungsblatt.)