AB Geometrie & Topologie
Dr. Hartmut Weiß

Daniel Faessler
Robert Kremser

WiSe 2009/2010

Analysis III

TUTORIUM 4

1. Es sei $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System auf einer Menge X. Zeigen Sie, dass für eine Menge $D \in \mathcal{D}$ das Mengensystem:

$$\mathcal{D}_D := \{\, Q \in \mathcal{P}(X) \,|\, Q \cap D \in \mathcal{D}\}$$

wieder ein Dynkin-System ist.

2. Es seien $\mathcal{R}$ ein Ring über einer Menge X und μ, ν Maße auf der von $\mathcal{R}$ erzeugten σ-Algebra $\mathcal{A}$ mit den Eigenschaften:

   (i) $\mu|_{\mathcal{R}} \leq \nu|_{\mathcal{R}}$, (d.h. $\mu(R) \leq \nu(R)$ für alle $R \in \mathcal{R}$)

   (ii) $\nu|_{\mathcal{R}}$ ist σ-endlich.

   Dann folgt auch $\mu \leq \nu$ auf ganz $\mathcal{A}$.

3. Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $U \subset R^n$ offen mit $K \subset U$. Zeigen Sie, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass $x + K := \{x + k \,|\, k \in K\} \subset U$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x|| < \delta$.

4. **Erinnerung / Definition:** Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(X) = 1$.

   Es sei μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß* auf $\mathcal{B}^1$. Da $(-\infty, x) \in \mathcal{B}^1$, ist die Funktion $F_\mu : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] : x \longmapsto \mu\big((-\infty, x)\big)$ wohldefiniert.

   Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften für F_μ:

   (a) F_μ ist monoton wachsend,

   (b) F_μ ist linksseitig stetig,

   (c) $\lim_{x\to-\infty} F_\mu(x) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} F_\mu(x) = 1$.