

Analysis III

TUTORIUM 3

1. Sei $K_i, i \in \mathbb{N}$, eine absteigende Familie von nichtleeren Kompakta in \mathbb{R}^n , d.h. $\emptyset \neq K_i \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $K_{i+1} \subset K_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass unter diesen Voraussetzungen $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$.
2. Sei X abzählbar unendlich. Betrachten Sie den Inhalt μ auf der Algebra $\mathcal{A} = \{A \subset X \mid A \text{ endlich oder } X \setminus A \text{ endlich}\}$, der wie folgt definiert ist:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist endlich} \\ \infty & X \setminus A \text{ ist endlich} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ zwar \emptyset -stetig, aber nicht σ -additiv ist.

3. Sei nun $X = \mathbb{R}$, also überabzählbar unendlich. Betrachten Sie die Mengenfunktion μ auf der (von den endlichen Mengen erzeugten) σ -Algebra

$$\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ abzählbar oder } \mathbb{R} \setminus A \text{ abzählbar}\},$$

die wie folgt definiert ist:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & \mathbb{R} \setminus A \text{ ist abzählbar} \end{cases}$$

- (a) Zeigen Sie, dass μ ein Maß ist.
 - (b) Zeigen Sie, dass das zugeordnete äußere Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ wie folgt bestimmt ist:
- $$\mu^*(A) = \begin{cases} 0 & A \text{ ist abzählbar} \\ 1 & A \text{ ist überabzählbar} \end{cases}$$
- (c) Zeigen Sie, dass μ^* kein Inhalt auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ist.
 - (d) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.
4. (Wiederholung:) Die *Cantor-Menge* ist wie folgt definiert: Für alle $n \geq 0$ und $0 \leq m < 3^n$ setzt man

$$I_{n,m} = \left(\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{m}{3^n}, \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{m}{3^n} \right) \subset [0, 1]$$

und $I_n = I_{n-1} \cup \bigcup_{0 \leq m < 3^n} I_{n,m}$, wobei $I_{-1} = \emptyset$. (Mit jedem n wird also das mittlere Drittel aller noch nicht zu I_{n-1} gehörigen Intervalle hinzugefügt.) Die Cantor-Menge ist dann $C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n \geq 0} I_n$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) (Wiederholung:) Die Cantor-Menge C ist nichtleer, kompakt, hat keine inneren Punkte und ist überabzählbar.
- (b) Die Cantor-Menge C ist (Borel-messbar und) eine Borel-Nullmenge.