AB Geometrie & Topologie
Dr. Hartmut Weiß
Daniel Faessler
Robert Kremser

WiSe 2009/2010

Analysis III

Tutorium 2

1. Zeigen Sie, dass ein Ring $\mathcal{R}$ über einer Menge X genau dann eine Algebra ist, falls $X \in \mathcal{R}$.

2. Zeigen Sie für das Zählmaß ζ auf $\mathcal{P}(X)$:

   (a) ζ ist endlich genau dann, wenn X endlich ist.

   (b) ζ ist σ-endlich genau dann, wenn X abzählbar ist.

3. Es sei μ die wie folgt definierte Mengenfunktion auf einer Menge $X \neq \emptyset$:

$$\mu \,:\, \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty] \,:\, A \longmapsto \begin{cases} 1 & : A \neq \emptyset \\ 0 & : A = \emptyset \end{cases}$$

   Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften von μ:

   (a) μ ist σ-subadditiv.

   (b) μ ist additiv $\Longleftrightarrow$ μ ist σ-additiv $\Longleftrightarrow$ X ist einelementig.

4. Es sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über X. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ heiße *μ-Nullmenge*, falls $\mu(N) = 0$. Es bezeichne $\mathcal{N}_\mu$ die Menge der μ-Nullmengen. Zeigen Sie:

   (a) $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$.

   (b) Für $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $M \in \mathcal{A}$ mit $M \subset N$ folgt $M \in \mathcal{N}_\mu$.

   (c) Für eine Folge $(N_n \,|\, n \in \mathbb{N})$ mit $N_n \in \mathcal{N}_\mu \;\forall n \in \mathbb{N}$ folgt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n \in \mathcal{N}_\mu$.

5. Ein Teilmengensystem $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ einer Menge X heißt ein *Halbring*, falls

   (i) $\emptyset \in \mathcal{H}$.

   (ii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ folgt $A \cap B \in \mathcal{H}$ (*Durchschnittstabil*).

   (iii) Für $A, B \in \mathcal{H}$ ist die Differenz $A \setminus B$ als eine endliche Vereinigung paarweise disjunkter Teilmengen von X in $\mathcal{H}$ darstellbar, d.h.:

$$\exists \mathcal{I} \subset \mathcal{H} \,\text{endlich} \,:\, I \cap J = \emptyset \text{ für } I \neq J \in \mathcal{I} \text{ und } \cup_{I\in\mathcal{I}} I = A \setminus B.$$

   Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

   (a) Die Elemente in dem von einem Halbring $\mathcal{H}$ erzeugten Ring $\mathcal{R}$ sind endliche Vereinigungen von Elementen in $\mathcal{H}$.

   (b) Die Menge $\mathcal{Q}^n$ der nach rechts halboffenen Quader in $\mathbb{R}^n$ ist ein Halbring und der von ihr erzeugte Ring ist genau der *Ring der Figuren* $\mathcal{F}^n$.