AB Geometrie & Topologie
Dr. Hartmut Weiß
Daniel Faessler
Robert Kremser

WiSe 2009/2010

Analysis III

Tutorium 13

1. **[Reell-projektive Räume]** Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ den n-dimensionalen reell-projektiven Raum wie folgt:
$$\mathbb{R}P^n := (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$$
mit $(x_0, \ldots, x_n) \sim (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n)$ für $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Elemente in $\mathbb{R}P^n$ bezeichenen wir auch mit $[x_0 : \cdots : x_n]$.
Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^n$ (mit der Quotienten-Topologie) durch folgende Karten mit einer Struktur als glatte Mannigfaltigkeit versehen werden kann: Für $U_i := \{[x_0 : \cdots : x_n] | x_i \neq 0\}$ definieren wir die Abbildung $\kappa_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ mittels $\kappa_i([x_0 : \cdots : x_n]) = (x_0/x_i, \ldots x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \ldots x_n/x_i)$.

2. Betrachten Sie die Abbildungen $f, g, h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die durch $f(x, y, z) = \exp x \cos y$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 z^2$ und $h(x, y, z) = y \sin z$ gegeben sind. Berechnen Sie $df \wedge dg$ und $df \wedge dg \wedge dh$.

3. Sei $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $f(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$, $g(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ und $\omega = f dx + g dy$. Gibt es eine differenzierbare Funktion $h : M \to \mathbb{R}$ mit $dh = \omega$?

4. Versuchen Sie, zu den Formen $\omega = (xy^2 + yz^2 + x^2 z) dx \wedge dy \wedge dz \in \Omega^3(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\omega = (2y - 4) dy \wedge dz + (y^2 - 2z) dx \wedge dz + (3 - x - xy) dx \wedge dy \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ ein $\sigma \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$ bzw. $\sigma \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ zu finden, dass die Bedingung $d\sigma = \omega$ erfüllt.

5. Sei $f : M \to N$ eine differenzierbare Abbildung glatter Mannigfaltigkeiten und seien $\omega, \eta \in \Omega^*(N)$. Zeigen Sie, dass $f^*(\omega \wedge \eta) = f^*\omega \wedge f^*\eta$.

6. **[Existenz von Buckelfunktionen]** Zeigen Sie: Für beliebige $0 < \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$ und $n \in \mathbb{N}$ existiert eine glatte Funktion $f : B^n_{\epsilon_3}(0) \to [0, 1]$, die die Bedingungen $f \equiv 1$ auf $B^n_{\epsilon_1}(0)$ und $f \equiv 0$ auf $B^n_{\epsilon_3}(0) \setminus B^n_{\epsilon_2}(0)$ erfüllt.

7. ($\star$) **[Einbettung von Mannigfaltigkeiten]** Zeigen Sie, dass jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M in einen euklidischen Raum eingebettet werden kann, d.h. dass ein $m \in \mathbb{N}$ und eine differenzierbare Abbildung $\iota : M \to \mathbb{R}^m$ existieren, so dass $\iota(M)$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^m$ ist und $\iota : M \to \iota(M)$ ein Diffeomorphismus ist.

   Hinweis: Konstruieren Sie für $0 < r < R < \infty$ eine glatte Abbildung $f : B_R(0) \subset \mathbb{R}^n \to S^n$, die $B_r(0)$ diffeomorph auf $S^n \setminus \{N\}$ und $B_R(0) \setminus B_r(0)$ konstant auf N abbildet. Finden Sie nun eine Einbettung von M in $(S^n)^k \subset (\mathbb{R}^{n+1})^k$.