

Analysis III

TUTORIUM 1

1. Sei X eine Menge und $\mathcal{S}, \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$. Beweisen Sie folgende Behauptungen:

- (a) \mathcal{S} ist σ -Algebra $\Leftrightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$.
- (b) $\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{T})$.
- (c) $\mathcal{S} = \{\emptyset\} \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \{X, \emptyset\}$.
- (d) $\mathcal{S} = \{A\} \Rightarrow \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{S}) = \{X, \emptyset, A, A^c\}$.

2. Sei X eine Menge, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra und μ ein Maß auf \mathcal{A} . Beweisen Sie folgende Behauptungen:

- (a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (b) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.
- (c) $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B, \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (d) $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

3. Sei X eine endliche Menge. Zeigen Sie, dass sich jedes Maß μ auf $\mathcal{P}(X)$ eindeutig zerlegen lässt als $\mu = \sum_{x \in X} a_x \delta_x$ mit $a_x \geq 0$ für alle $x \in X$.

4. Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an, die Borel-messbar, aber nicht stetig ist.

5. (Zur Erinnerung:) Sei X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$. Die von \mathcal{S} erzeugte Topologie ist definiert als

$$\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X) \\ \mathcal{T} \text{ Topologie}}} \mathcal{T}.$$

Man bezeichnet \mathcal{S} dann auch als Subbasis von $\mathcal{T}(\mathcal{S})$.

Beweisen Sie die folgenden Aufgaben:

- (a) $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ ist eine Topologie.
- (b) $\mathcal{T}(\mathcal{S}) = \{\bigcup_{I \in J} \bigcap_{i \in I} i \mid J \subset \mathcal{P}(\mathcal{S}), J \text{ beliebig}, I \text{ endlich für alle } I \in J\}$.
- (c) \mathcal{S} heißt Basis (einer Topologie), falls \mathcal{S} eine durchschnittstabile Subbasis ist (d.h. Schnitte von Elementen in \mathcal{S} liegen wieder in \mathcal{S}). Wie vereinfacht sich die Darstellung aus der vorigen Teilaufgabe unter der Annahme, dass \mathcal{S} durchschnittstabil, also eine Basis ist?