

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 9

Abgabe am Montag, 21.12.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte Beachten Sie, mit einem \star versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

Durchweg sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Der Raum der reellwertigen μ -integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ bezeichnet.

1. Es sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Familie paarweise disjunkter Mengen $A_n \in \mathcal{A}$. Es bezeichne A ihre Vereinigung und f eine auf A definierte Funktion. Zeigen Sie, dass f genau dann über A μ -integrierbar ist, falls f über jedes A_n μ -integrierbar ist und die Reihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} |f| d\mu$ konvergiert.
2. Es sei nun μ ein *endliches* Maß.
 - (a) Zeigen Sie die μ -Integrierbarkeit von Limiten gleichmäßig konvergenter Folgen reellwertiger μ -integrierbarer Funktionen, also:

$$(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu), \text{ gleichmäßig konv.} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu).$$
 - (b) Finden Sie ein Beispiel einer Folge von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{L}^1, \lambda^1)$, welche gleichmäßig gegen eine nicht integrierbare Funktion f konvergiert.
3. Zeigen Sie, dass die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht bzgl. Konvergenz im Mittel in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ sind.

Hinweis: Finden Sie für ein $A \in \mathcal{L}^n$ mit $\lambda^n(A) < \infty$ und $\varepsilon > 0$ eine stetige Funktion h so dass $\|h - \chi_A\|_1 < \varepsilon$. Finden Sie dazu zunächst eine kompakte Menge K sowie eine offene Menge U mit $K \subset A \subset U$, so dass $\lambda^n(U \setminus K) < \varepsilon/2$ ist! Konstruieren Sie nun eine stetige Funktion $0 \leq h \leq 1$ mit $h|_K \equiv 1$ und $h|_{U^c} \equiv 0$.

4. Zeigen Sie: Ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ bzgl. der Halbnorm $\|\cdot\|_1$, dann existiert $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, so dass eine Teilfolge von (f_n) punktweise fast überall gegen f und (f_n) selbst im Mittel gegen f konvergiert.

Schließen Sie nun, dass $(L^1(X, \mathcal{A}, \mu), \|\cdot\|_1)$ ein vollständiger normierter Raum, m.a.W. ein *Banachraum* ist.

Hinweis: Betrachten Sie eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_1 \leq 2^{-k}$. Zeigen Sie: $g = \sum_{k \in \mathbb{N}} g_k$ mit $g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k}$ ist in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Folgern Sie: g konvergiert punktweise fast überall, also auch (f_{n_k}) . Wenden Sie nun den Satz über majorisierte Konvergenz an.

Bitte wenden

5. Aufgabe 4 besagt insbesondere: Konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ im Mittel gegen $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, dann existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Zeigen Sie: Im Allgemeinen konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst *nicht* punktweise fast überall gegen f .