

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 5

Abgabe am Montag, 23.11.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte Beachten Sie: Mit einem \star versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

1. Es sei $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) F ist beschränkt,
- (ii) F ist monoton wachsend und $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,
- (iii) F ist linksseitig stetig.

Zeigen Sie die Existenz sowie die Eindeutigkeit eines *endlichen* Maßes μ auf \mathcal{B}^1 , welches für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $F(x) = \mu((-\infty, x))$ erfüllt.

Hinweis: Verfahren Sie analog zur Konstruktion des Lebesgue-Maßes auf \mathcal{B}^1 . Zeigen Sie also unter Verwendung von (ii) die Existenz eines Inhaltes μ auf \mathcal{F}^1 mit $\mu([a, b)) = F(b) - F(a)$, welcher σ -additiv (also ein endl. Prämaß) auf \mathcal{F}^1 ist. Wenden Sie den Fortsetzungs- bzw. Eindeutigkeitssatz der Vorlesung an.

2. Zeigen Sie den folgenden **Satz von Steinhaus**:

Ist $A \in \mathcal{L}^n$ mit $\lambda^n(A) > 0$, dann existiert $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass $A \cap (x + A) \neq \emptyset$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x\| < \delta$.

Hinweis: Argumentieren Sie, dass Sie ohne Einschränkung die Beschränktheit von A annehmen dürfen. Überlegen Sie sich, dass es dann eine kompakte Menge K sowie eine offene Menge U mit $K \subset A \subset U$ gibt, so dass $\lambda(K) < 2\lambda(U)$. Folgern Sie den Satz unter Benutzung der Aufgabe (3) des 4. Tutoriumblattes.

3. Zeigen Sie die Existenz der folgenden Zerlegung für invertierbare Matrizen:

Es sei $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$, dann existieren zwei Matrizen $O, O' \in \text{O}(n)$ sowie eine Diagonalmatrix D mit positiven Einträgen, so dass $A = ODO'$.

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $A^t A$, diese ist symmetrisch und in diesem Sinne positiv definit. Es existiert also eine positiv definite Matrix A' mit $(A')^2 = A^t A$. Schauen Sie die Matrizen $A(A')^{-1}$ und $(A(A')^{-1})^t$ scharf an.

Bitte wenden

4. Untersuchen Sie das Transformationsverhalten des Lebesgue-Maßes λ^n auf \mathcal{L}^n unter invertierbaren affin-linearen Abbildungen:

Es sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $\varphi(x) := Ax + b$ für $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist A eine Diagonalmatrix mit positiven Einträgen a_1, \dots, a_n , dann gilt:

$$\varphi_*\lambda^n = (a_1 \cdot \dots \cdot a_n)^{-1} \cdot \lambda^n.$$

(b) Für $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ beliebig gilt allgemein:

$$\varphi_*\lambda^n = |\det A|^{-1} \cdot \lambda^n.$$

Hinweis: Argumentieren Sie für den ersten Aufgabenteil die Invarianz des Raumes der Quader unter Diagonalmatrizen. Nutzen Sie dann den in der Vorlesung bereitgestellten Satz über die Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes.