AB Geometrie & Topologie WiSe 2009/2010
Dr. Hartmut Weiß

Daniel Faessler
Robert Kremser

Analysis III

Übungsblatt 4

Abgabe am Montag, 16.11.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte beachten Sie: Mit einem $\star$ versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

1. Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ und μ^* das zugeordnete äußere Maß. Zeigen Sie, dass jede Menge $Q \in \mathcal{P}(X)$ eine sogenannte *messbare Hülle* A hat, d.h. eine Menge $Q \subset A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = \mu^*(Q)$ und $\mu(B) = 0$ für alle $B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A \setminus Q$.
   Hinweis: Warum genügt es, diese Aussage zunächst nur für Q mit $\mu^*(Q) < \infty$ zu zeigen?

2. Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten (und ihrerseits eine Nullmenge) ist. In diesem Fall nennt man auch das Maß μ *vollständig*.
   Man sagt, dass ein Maß μ' ein anderes Maß μ *fortsetzt*, wenn $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$ und $\mu'_{|\mathcal{A}} = \mu$ gelten, wobei $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}'$ die σ-Algebren bezeichnen, auf denen μ bzw. μ' definiert sind.

   (a) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, μ^* das zugeordnete äußere Maß und $\mathcal{A}^*$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Teilmengen von X. Zeigen Sie, dass das Maß $\mu^*_{|\mathcal{A}^*}$ vollständig ist.

   (b) Sei X eine Menge und μ ein beliebiges Maß auf $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Zeigen Sie, dass μ so zu einem vollständigen Maß μ_0 (auf einer σ-Algebra $\mathcal{A}_0$) fortgesetzt werden kann, dass jedes weitere vollständige Maß, das μ fortsetzt, auch μ_0 fortsetzt. Man nennt dann μ_0 die *Vervollständigung* von μ.
   Zeigen Sie dazu, dass man die Vervollständigung darstellen kann als $\mathcal{A}_0 = \{A \cup N | A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$ mit $\mu_0(A \cup N) = \mu(A)$.

   (c) Zeigen Sie die Richtigkeit folgender Aussage: $A \subset X$ liegt genau dann in $\mathcal{A}_0$, wenn es zwei Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ mit $A_1 \subset A \subset A_2$ und $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$ gibt.

3. Sei X eine Menge, μ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, μ^* das zugeordnete äußere Maß und $\mathcal{A}^*$ die σ-Algebra der μ^*-messbaren Mengen. Zeigen Sie, dass $\mu^*_{|\mathcal{A}^*}$ die Vervollständigung von μ ist.

4. Sei X eine Menge und $x \in X$ ein Element daraus. Sei weiter $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Ring, mit der Eigenschaft, dass die Menge $\{x\}$ der Schnitt von abzählbar vielen Mengen in $\mathcal{R}$ und X die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen in $\mathcal{R}$ ist. Betrachten Sie das Dirac-Prämaß δ_x auf $\mathcal{R}$ und das zugeordnete äußere Maß δ_x^* auf $\mathcal{P}(X)$, und zeigen Sie:

   (a) Das äußere Maß δ_x^* ist gerade das Dirac-Maß auf $\mathcal{P}(X)$ (bei dem die gesamte Masse in x konzentriert ist).

   (b) Die Menge der bezüglich δ_x^* messbaren Mengen ist gerade $\mathcal{P}(X)$.