AB Geometrie & Topologie
Dr. Hartmut Weiß

Daniel Faessler
Robert Kremser

WiSe 2009/2010

Analysis III

Übungsblatt 3

Abgabe am Montag, 09.11.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte Beachten Sie: Mit einem $\star$ versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

1. Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein nach rechts halboffener Quader, also $I \in \mathcal{Q}^n$. Weiter sei $\{I_i \,|\, i = 1, \ldots, k\} \subset \mathcal{Q}^n$ eine Zerlegung von I in k paarweise disjunkte nach rechts halboffene Quader, d.h. $I = I_1 \cup \cdots \cup I_k$ und $I_i \cap I_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

   Zeigen Sie die Additivität des *elementargeometrischen Volumens* für die oben angegeben Zerlegung, d.h.:

$$\mathrm{vol}^n(I) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{vol}^n(I_i).$$

2. Es seien X eine Menge und $\mathcal{P}(X)$ die Potenzmenge von X.

   Zeigen Sie, dass auf $\mathcal{P}(X)$ bezüglich der Verknüpfungen

   - $\triangle : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : (A, B) \longmapsto (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (*additiv*)
   - $\cap : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X) : (A, B) \longmapsto A \cap B$ (*multiplikativ*)

   die Struktur eines kommutativen Ringes im *algebraischen Sinne* gegeben ist.

   Zeigen Sie weiter, dass eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ genau dann ein Ring im Sinne der Vorlesung ist, wenn $\mathcal{R}$ auch ein Unterring von $\mathcal{P}$ im Sinne der Algebra ist.

3. Für eine Menge X und einen beliebigen Ring $\mathcal{R} \subset \mathcal{P}(X)$ heiße ein Teilmengensystem $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ ein *Ideal in* $\mathcal{R}$, falls es den folgenden Eigenschaften genügt.

   (i) $\emptyset \in \mathcal{N}$.

   (ii) Für $A \in \mathcal{N}$ und $B \in \mathcal{R}$ mit $B \subset A$ folgt $B \in \mathcal{N}$.

   (iii) Für $A, B \in \mathcal{N}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{N}$.

   (a) Zeigen Sie, dass ein Teilmengensystem $\mathcal{N} \subset \mathcal{R}$ genau dann ein Ideal im obigen Sinne ist, wenn es ein Ideal im algebraischen Sinne bezüglich der in Aufgabe (2) beschriebenen Ringstruktur auf $\mathcal{R}$ ist.

Bitte wenden

(b) Beweisen Sie auch, dass jedes Ideal in $\mathcal{R}$ selbst ein Ring ist.

(c) Sei μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Sei weiter $\mathcal{E} := \{A \in \mathcal{R} \,|\, \mu(A) < \infty\}$ das System der Mengen endlichen Inhalts. Zeigen Sie, dass $\mathcal{E}$ ein Ideal ist.

4. Es sei X eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring über X und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

   (a) Durch $A \sim B \;:\Longleftrightarrow\; \mu(A \triangle B) = 0$ für $A, B \in \mathcal{R}$ wird auf $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert.

   (b) Die Äquivalenzklasse $\mathcal{N}$ der leeren Menge ist ein Ideal in $\mathcal{R}$.
   (Die Elemente in $\mathcal{N}$ heißen fortan *μ-Nullmengen*).

   (c) Für $A, B \subset \mathcal{R}$ gelten im Falle $A \sim B$ die Gleichungen:

   $$\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cap B) = \mu(A \cup B).$$

   ($\star$) Setzt man die Endlichkeit von μ voraus, so definiert die folgende Abbildung:

   $$\delta \,:\, \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty) \,:\, (A, B) \longmapsto \mu(A \triangle B)$$

   eine Halbmetrik auf $\mathcal{R}$, bezüglich derer die Mengenfunktion μ und die Mengenoperationen $\cap, \cup, \triangle, \setminus \,:\, \mathcal{R} \times \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R}$ gleichmäßig stetig sind.
   Für Halbmetriken ersetzt man das Definitheitsaxiom für Metriken durch das schwächere Axiom: $\delta(A, A) = 0 \,\forall A \in \mathcal{R}$. Gleichmäßige Stetigkeit bzgl. Halbmetriken wird genauso definiert wie im Falle von Metriken.
   Nun sei $\hat{\mathcal{R}}$ die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim$, also $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}/\mathcal{N}$. Analog wird die Äquivalenzklasse eines Elements $A \in \mathcal{R}$ mit $\hat{A} \in \hat{\mathcal{R}}$ bezeichnet. Dann liefert der folgende Ausdruck eine wohldefinierte Metrik auf $\hat{\mathcal{R}}$:

   $$d \,:\, \hat{\mathcal{R}} \times \hat{\mathcal{R}} \longrightarrow [0, \infty) \,:\, \left(\hat{A}, \hat{B}\right) \longmapsto \delta(A, B)\,, \quad \text{für } A \in \hat{A},\ B \in \hat{B}.$$