AB Geometrie & Topologie
Dr. Hartmut Weiß

Daniel Faessler
Robert Kremser

WiSe 2009/2010

Analysis III

Übungsblatt 2

Abgabe am Montag, 2.11.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte beachten Sie: Mit einem $\star$ versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

1. Sei X eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von X. Bestimmen Sie die von $\mathcal{E}$ erzeugte Algebra und die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra.

2. Betrachten Sie die Teilmenge $\{[a,b] \cap \mathbb{Q} | a, b \in \mathbb{R}, a < b\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Zeigen Sie, dass die von dieser Menge erzeugte σ-Algebra gerade $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ ist.

3. Sei μ ein Maß auf $\mathcal{P}([0,1])$ mit Werten in $\{0,1\}$, so dass $\mu([0,1]) = 1$ (d.h. μ ist nicht das Nullmaß). Zeigen Sie, dass es ein $x \in [0,1]$ gibt, so dass $\mu = \delta_x$.
   Hinweis: Intervallschachtelung.

4. (a) Zeigen Sie, dass die offenen Quader $(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^n | a < x < b\}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}^n$, $a < b$, die Standardtopologie von $\mathbb{R}^n$ erzeugen. Insbesondere ist die Topologie von $\mathbb{R}^n$ also abzählbar erzeugt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_\sigma(\mathcal{Q}^n) = \mathcal{B}^n$.