AB Geometrie & Topologie WiSe 2009/2010
Dr. Hartmut Weiß
Daniel Faessler
Robert Kremser

Analysis III

Übungsblatt 12

Abgabe am Montag, 25.01.2010 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte beachten Sie: Mit einem $\star$ versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

Für alle Aufgaben dieses Übungsblattes bezeichne $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $t : X \to \mathbb{R}^m$ eine glatt differenzierbare Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ heiße *kritischer Punkt* für t, wenn $\mathrm{Rang}(Dt)(x) < m$; die Menge aller kritischen Punkte für t werde mit $C \subset X$ bezeichnet. Zu den klassischen Resultaten der Differentialtopologie gehört der

Satz von Sard (1942): Die Menge $t(C) \subset \mathbb{R}^m$ hat verschwindendes Lebesgue-Maß.

Wir werden im Folgenden die Fälle $n < m$ und $n = m$ besprechen.

1. Wir betrachten zunächst den Fall $n < m$.

   (a) Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Dann gilt für jede Lebesgue-Nullmenge $A \subset U$, dass $\lambda^m(f(A)) = 0$.

   (b) Folgern Sie hieraus den Satz von Sard für den Fall $n < m$.

   Hinweise: Zeigen sie, dass es genügt, die Aussage von Teil (a) unter der zusätzlichen Annahme zu zeigen, dass $\overline{U}$ kompakt ist. Verwenden Sie außerdem die stetige (warum?) Funktion

   $$M : U \to \mathbb{R}, x \mapsto \max_{0 \neq v \in \mathbb{R}^m} \left(\frac{\|(Df)(x)(v)\|}{\|v\|} \right)$$

   sowie die Tatsache, dass Sie U mit Würfeln von beliebig kleiner Kantenlänge überdecken können.

2. Von nun an sei $n = m$.

   (a) Führen Sie den Beweis des Satzes von Sard für diesen Fall auf folgende Aussage zurück: Sei $W \subset \mathbb{R}^m$ ein Würfel mit $\overline{W} \subset X$. Dann ist $t(W \cap C)$ eine Lebesgue-Nullmenge.

(b) Folgern Sie aus dem Mittelwertsatz, dass für alle $x, a \in W$ und $j \in \{1, \ldots, n\}$ eine Zahl $\xi_j \in (0,1)$ existiert, so dass

$$t_j(x) = t_j(a) + ((Dt_j)(a + \xi_j(x-a)))(x-a)$$

gilt.

3. Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig gewählt. Betrachten Sie Unterteilungen des Würfels W in disjunkte Teilwürfel W_k von gleicher (kleiner) Kantenlänge l.

(a) Betrachten Sie einen Punkt $a \in C \cap W_k$ für irgendein k. Argumentieren Sie, dass Sie annehmen dürfen, dass $t(a) = 0$ und $(Dt_m)(a) = 0$.

(b) Folgern Sie hieraus, dass es eine von ϵ unabhängige Konstante K sowie Schranken $\delta(\epsilon)$ gibt, so dass für alle Unterteilungen von W mit $l \leq \delta(\epsilon)$

$$\lambda^m(t(C \cap W_k)) \leq K\epsilon\lambda^m(W_k)$$

für alle Teilwürfel W_k gilt.

(c) Beweisen Sie nun den Satz von Sard für den Fall $n = m$.

4. Es seinen nun $X, Y \subset \mathbb{R}^m$ offene Teilmengen und $t : X \to Y$ eine surjektive glatte Abbildung. Folgern sie mit dem Satz von Sard die Existenz eines Punktes $y \in Y$, so dass $t^{-1}(y) \subset X$ diskret ist.