

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 1

Abgabe am Montag, 26.10.2009 bis 10:00 Uhr im Übungskasten dieser Vorlesung.

Bitte beachten Sie: Mit einem \star versehene Aufgaben sind **nicht** für die Klausuren relevant! Sie sollen lediglich Ihr Interesse wecken.

1. Sei $\varphi : (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eukl}})$ eine Isometrie. Zeigen Sie, dass φ von der Form

$$\varphi(x) = Ax + b$$

für $A \in O(n)$ und $b \in \mathbb{R}^n$ ist.

2. Sei X eine Menge. Ein Teilmengensystem $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt *Algebra* über X , falls gilt:

- (i) $X \in \mathcal{S}$,
- (ii) $A \in \mathcal{S} \Rightarrow A^c \in \mathcal{S}$,
- (iii) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$.

Zeigen Sie dann die folgenden Aussagen, wobei \mathcal{S} eine Algebra sei:

- (a) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
- (b) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{S}$,
- (c) $A, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$,
- (d) $A_i \in \mathcal{S} (i = 1, \dots, n) \Rightarrow \cup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$ und $\cap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{S}$.
- (e) Ist \mathcal{A} eine σ -Algebra, so ist \mathcal{A} insbesondere eine Algebra.

3. Sei X eine Menge. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Das Teilmengensystem $\{A \subset X : A \text{ abzählbar oder } A^c \text{ abzählbar}\}$ ist eine σ -Algebra.
- (b) Das Teilmengensystem $\{A \subset X : A \text{ endlich oder } A^c \text{ endlich}\}$ ist eine Algebra. Weiter ist es genau dann eine σ -Algebra, wenn X endlich ist.

Bitte wenden

4(★). Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Auf dem Raum $\mathcal{C}([0, 1], X)$ der stetigen Abbildungen $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ sei die folgende Funktion gegeben:

$$\ell : \mathcal{C}([0, 1], X) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\gamma \mapsto \sup_{k \in \mathbb{N}, 0=t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k=1} \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})).$$

Der Wert $\ell(\gamma)$ heißt die *Länge der Kurve* γ . Ist $\ell(\gamma) < \infty$, also die Kurve γ von *endlicher Länge*, so heißt die Kurve *rektifizierbar*.

- (a) Zeigen Sie die Rektifizierbarkeit Lipschitz-stetiger Kurven.
 (b) Nun sei (X, d) die euklidische Ebene $(\mathbb{R}^2, d_{\text{eukl}})$ (identifiziert mit den komplexen Zahlen \mathbb{C}) und $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Kurven $\gamma_n : [0, 1] \rightarrow X$ mit:

$$\gamma_0(t) = t \in \mathbb{C},$$

$$\gamma_{n+1}(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}\gamma_n(4t) & : t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ \frac{\sigma}{3}\gamma_n(4t-1) + \frac{1}{3} & : t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right] \\ \frac{\sigma}{3}\gamma_n(4t-2) + \frac{1+\sigma}{3} & : t \in \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right] \\ \frac{1}{3}\gamma_n(4t-3) + \frac{2}{3} & : t \in \left[\frac{3}{4}, 1\right] \end{cases}, \quad \text{für } \sigma := e^{i\pi/3}, \quad \forall n > 0.$$

(Siehe die Abbildung unten!)

Zeigen Sie die Existenz eines gleichmäßigen Limes κ der Folge $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die sogenannte *von Kochsche Kurve*.

Zeigen Sie weiter, dass κ nicht rektifizierbar ist.

