

Seminar: Reduktive Algebraische Gruppen

Prof. Dr. Nikita Semenov, Simon Weinzierl

01. April 2020

1 Einleitung

Theoreme, die die Gesamtheit aller Gruppen betreffen, sind in der Mathematik rar. Um wenigstens teilweise einen Zugang zu erhalten, ist es sinnvoll, seine Betrachtung auf solche Gruppen zu lenken, welche zusätzliche *schöne* Eigenschaften aufweisen.

Beispielsweise sind starke Klassifikationsaussagen verfügbar, wenn man sich auf Gruppen beschränkt, die endlich und einfach sind [Asc04], die Struktur einer zusammenhängenden kompakten Mannigfaltigkeit aufweisen ([Bou89] und [Bou05]) oder die einer Varietät [Spr98]. In den beiden zuletzt genannten Beispielen nimmt man überdies an, dass die Gruppenverknüpfung sowie die Inversionsabbildung jeweils glatt bzw. ein Morphismus von Varietäten ist, also dass ein Gruppenobjekt in einer entsprechenden Kategorie vorliegt.

Es wird sich herausstellen, dass die Strukturtheorie affiner algebraischer bzw. wie man äquivalent auch sagt linearer algebraischer Gruppen, große Ähnlichkeit zur Theorie der Lie-Gruppen besitzt. Im diesem Fall nimmt man, um die Analyse ein wenig zu vereinfachen, die Bedingung der Halbeinfachheit hinzu. Eine Lie-Gruppe heißt halbeinfach, genau dann wenn sie keine normalen, nicht-trivialen, auflösbaren Untergruppen enthält. Eine solche Forderung lässt sich auf die gleiche Art und Weise für algebraische Gruppen formulieren. Wir wollen in diesem Seminar die allgemeineren, reduktiven linearen algebraischen Gruppen analysieren, welche sich dadurch auszeichnen, dass sie ein Produkt zweier normaler Untergruppen sind, wobei eine Untergruppe halbeinfach und die andere Untergruppe ein Torus ist.

Der Begriff der *Reduktivität* wird manchmal mit dem der Kompaktheit bei Lie-Gruppen verglichen. Hierbei gilt folgendes: Über dem Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist eine lineare algebraische Gruppe G genau dann reduktiv, wenn die rationalen Punkte $G(\mathbb{C})$ die Komplexifizierung einer (reellen) kompakten Lie-Gruppe bilden. Es ist jedoch Vorsicht geboten, denn die rationalen Punkte einer reduktiven Gruppe formen nicht immer eine kompakte Gruppe, wie man am Beispiel von SL_n einsieht. Die Reduktivität von SL_n lässt sich schließlich dadurch einsehen, dass man bemerkt, dass $SL_n(\mathbb{C})$ die Komplexifizierung der reellen Lie-Gruppe $SU(n)$ ist.

Die Hauptquelle für dieses Seminar werden die ersten zehn Kapitel aus dem Buch von Springer [Spr98] bilden, wobei im Literaturverzeichnis noch weitere gute Standardwerke¹ zur Materie angegeben sind. Nennenswert sind hierbei [Bor97], [Hum75], [Mil17] und [CGP15], wobei die beiden zuletzt genannten moderne Notation verwenden.

Wir werden uns an die Notationen und Konventionen aus [Spr98] halten. Dementsprechend handelt es sich bei unseren Varietäten um reduzierte Schemata, welche endlichen Typs und separiert über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k sind. Dies erleichtert zum einen die Handhabung der geometrischen Objekte ungemein, womit gemeint ist, dass wir keine nicht-abgeschlossenen Punkte auf den Varietäten betrachten werden (siehe auch [Har77, II, Proposition 4.10]). Zum anderen ist auch der Umgang mit Morphismen ist leichter: Ein Morphismus zwischen affinen Varietäten entspricht einfach einer rationalen Funktion.

¹Referenzen für algebraische Geometrie seien: [GW10], [GD71] und [Har77].

2 Termine

Im ganzen gibt es 12 mögliche Termine, welche im Folgenden aufgelistet sind:

- ~~20.04: Besprechung.~~
- 01.06: ~~Pfingstmontag.~~
- 13.07:
- 27.04:
- 08.06:
- 20.07:
- 04.05:
- 15.06:
- 11.05:
- 22.06:
- (27.07:)
- 18.05:
- 29.06:
- 25.05:
- 06.07:
- (03.08:)

Es sei an dieser Stelle bemerkt, dass es sich hierbei um alle prinzipiell möglichen Termine handelt. Es werden voraussichtlich nicht alle Termine genutzt werden können, zumal es bei den beiden zuletzt genannten um (bisher nur angedachte) Ausweichtermine handelt.

Weiterhin ist der besonderen Situation im Hinblick auf die Coronavirus SARS-CoV-2-Pandemie geschuldet, dass die ersten Termine als Präsentation über die Videokonferenzplattform *zoom* stattfinden. Zu diesem Dienst können sie sich unter

`https://lmu-munich.zoom.us/`

registrieren. Sie werden dann um 16 Uhr an den entsprechenden Tagen eine Einladung zu einer zoom-Konferenz per E-Mail zugeschickt bekommen. Deshalb ist es notwendig, dass, falls Sie Interesse am Seminar haben, dies durch eine E-Mail an

`semenov@math.lmu.de` oder `weinzier@math.lmu.de`

kundtun. Wir würden Sie bitten bei dieser und allen nachfolgenden E-Mails den Marker

[RedAlgGrp]

an den Anfang des Betreffs zu stellen. Wir freuen uns auf rege Teilnahme!

3 Themen

Die Themen sind bereits in der Reihenfolge aufgeführt, in welcher sie später stattfinden könnten, wobei die Vorträge über

- Allgemeines über Algebraische Gruppen,
- Lie-Algebren,
- Existenz von Quotienten,
- das Isomorphietheorem und
- das Existenztheorem

in jedem Fall stattfinden sollten. Alle anderen Themen können im Bedarfsfall auch als Einschub abgehandelt werden. Im Allgemeinen soll gelten, dass die ersten Vorträge in der Auflistung dazu dienen dem Publikum eine Übersicht zu bieten. Daher ist es in ihnen nicht notwendig alle Resultate rigoros zu zeigen. Bei den späteren Vorträgen sollte das Augenmerk eher darauf liegen, die einzelnen Argumente auszuführen bzw. deren Struktur verständlich zu machen.

- **Allgemeines über Algebraische Gruppen, Jordanzerlegung:** Einführung von algebraischen Gruppen, homogenen Räumen und Beweis erster grundlegender Resultate und jeweils unterfüttert mit Beispielen. Außerdem Präsentation der Jordanzerlegung in linearen algebraischen Gruppen (siehe [Spr98, Chapter 2] und [Mil17, Chapters 1,2,9.b]).

- **Kommutative Gruppen:** In diesem Vortrag soll es um kommutative lineare algebraische Gruppen gehen. Besonderes Aufmerksamkeit gilt der Theorie der Tori (und unipotenten Gruppen). Quellen hierfür sind [Spr98, Chapter 3], [Mil17, Chapters 12,14] und eventuell [CGP15, Appendix B.1].

- **Topologische Eigenschaften von Morphismen:** Hierbei handelt es sich vielfach um bereits aus der algebraischen Geometrie bekannte Sätze. Ziel des Vortrages ist es, alle Teilnehmer mit den Sätzen und ihren Beweis(-ide)en vertraut zu machen und die Aussagen auf den Fall von algebraischen Gruppen zu spezialisieren (siehe [Spr98, Sections 5.1–5.4]).

- **Lie-Algebra, Lang’s Theorem:** In diesem Vortrag soll der Begriff der Lie-Algebra eingeführt werden und grundlegende Resultate erarbeitet werden. Außerdem soll im Fall $\text{char}(k) > 0$ Lang’s Theorem gezeigt werden (siehe [Spr98, Chapter 4]). Zu diesem Zweck dürfte es sinnvoll sein, Separabilitätskriterien, sowie Eigenschaften von Derivationen zu wiederholen (siehe [Mat70, Ch. 10], [Gro64, 0.§ 20] oder [Jac80, Sections 8.15-8.16]).

- **Existenz von Quotienten:** Für eine normale Untergruppe $H \subseteq G$ einer algebraischen Gruppe ist die Faktorgruppe (der rationalen Punkte) selbstverständlich wieder eine Gruppe. In diesem Vortrag wird es darum gehen, weshalb der Quotient auch als Varietät existiert und was eine solche Aussage überhaupt bedeutet (siehe [Spr98, Section 5.5] und [Mil17, Appendix B]).

- **Parabolische, Borel-Untergruppen und maximale Tori:** In diesem Vortrag werden die drei wichtigsten Typen von Untergruppen in zusammenhängenden algebraischen Gruppen eingeführt werden. Die parabolischen Untergruppen sind Untergruppen, deren Quotient eine eigentliche Varietät ist. Minimale parabolische Untergruppen heißen Borel-Untergruppen. Maximale Tori sind schlicht Tori von maximaler Dimension. Diese Begriffe haben viele gute Eigenschaften, welche hier präsentiert werden sollen. Außerdem sollte in diesem Zusammenhang die Strukturtheorie der auflösbaren algebraischen Gruppen angerissen werden (siehe [Spr98, Section 6]).

- **Weylgruppen, Wurzeldata:** Hier wird es um diejenigen kombinatorischen Objekte, mit denen die reduktiven Gruppen klassifiziert werden sollen, gehen. Als erste Anwendung soll der Fall von zusammenhängenden, halbeinfachen Gruppen von Rang 1 untersucht werden (siehe [Spr98, Sections 7.1–7.5]).

- **Reduktive Gruppen, Borel-Untergruppen:** Die Gesamtheit der Borel-Untergruppen und parabolischen Untergruppen einer reduktiven Gruppe bilden ein kombinatorisches Objekt (Bruhat-Tits Gebäude, siehe [AB10, Appendix C]) dessen Eigenschaften hier ausgearbeitet werden sollen (siehe [Spr98, Sections 7.6–8.3]).

- **Bruhat Zerlegung:** Hier soll auf die Bruhat-Zerlegung und ihre geometrischen Konsequenzen eingegangen werden (siehe [Spr98, Sections 8.4–8.5]). Die Bruhat-Zerlegung bedeutet, dass jede reduktive Gruppe G als disjunkte Vereinigung von Doppelnebenklassen der Form $B\dot{w}B$ geschrieben werden kann, wobei $\dot{w}$ ein Lift eines Elements w der Weyl-Gruppe $W(G, T)$ und B eine Borel-Untergruppe sei. Dies alles gilt natürlich nur bezüglich der Wahl eines maximalen Torus $T \subseteq G$.

- **Das Isomorphietheorem:** Dieser Themenblock sollte auf zwei Sitzungen aufgeteilt werden. Der erste Vortrag behandelt die Analyse von Rang 2 reduktiven algebraischen Gruppen und die Einführung der Strukturkonstanten (siehe [Spr98, Sections 9.1–9.2]).

- Der zweite Teil schließt daraus das Isomorphietheorem für allgemeine reduktive Gruppen. Demnach sind zwei solche Gruppen genau dann isogen, wenn dies auch auf ihre Wurzeldata zutrifft. Eine solche Aussage ist deshalb schön, weil Wurzeldata kombinatorische Objekte sind und ein Vergleich von Wurzeldata daher einfacher ist als von algebraischen Gruppen (siehe [Spr98, Sections 9.3–9.5]).

- **Das Existenztheorem:** Hier ist zu zeigen, dass zu jedem Wurzeldatum eine lineare algebraische Gruppe existiert, deren Lie-Algebra dieses Datum aufweist. Hier können vermutlich nicht alle Rechnungen vorgeführt werden, daher sollte besonderes Interesse auf einer sinnvollen Darstellung der Reduktionsargumente liegen. Also zum einen vom Übergang eines beliebigen Wurzeldatums auf Irreduzible, und zum anderen von beliebigen irreduziblen Wurzeldata auf Einfach-gestrickte. Siehe [Spr98, Chapter 10].

Literatur

- [AB10] ABRAMENKO, Peter ; BROWN, Kenneth S.: *Buildings*. New York : Springer, 2010 (Graduate Texts in Mathematics 248)
- [Asc04] ASCHBACHER, Michael: The status of the classification of the finite simple groups. In: *Notices of the American Mathematical Society* 51 (2004), Nr. 7, S. 736–740
- [Bor97] BOREL, Armand: *Linear Algebraic Groups*. 2. New York : Springer, 1997 (Graduate texts in mathematics 126)
- [Bou89] BOURBAKI, Nicolas: *Lie Groups and Lie Algebras*. Berlin : Springer, 1989
- [Bou05] BOURBAKI, Nicolas: *Lie Groups and Lie Algebras*. Berlin : Springer, 2005
- [CGP15] CONRAD, Brian ; GABBER, Ofer ; PRASAD, Gopal: *Pseudo-reductive Groups*. 2. Cambridge University Press, 2015 (New Mathematical Monographs 26)
- [DG70a] DEMAZURE, Michel ; GABRIEL, Pierre: *Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*. Bd. 1: *Groupes algébriques*. Amsterdam : North Holland, 1970
- [DG70b] DEMAZURE, Michel ; GROTHENDIECK, Alexander: *Schémas en groupes I: Séminaire Algébrique du Bois Marie 1962–64*. Berlin : Springer, 1970 (Lecture Notes in Mathematics 151)
- [DG70c] DEMAZURE, Michel ; GROTHENDIECK, Alexander: *Schémas en groupes II: Séminaire Algébrique du Bois Marie 1962–64*. Berlin : Springer, 1970 (Lecture Notes in Mathematics 152)
- [DG70d] DEMAZURE, Michel ; GROTHENDIECK, Alexander: *Schémas en groupes III: Séminaire Algébrique du Bois Marie 1962–64*. Berlin : Springer, 1970 (Lecture Notes in Mathematics 153)
- [GD71] GROTHENDIECK, Alexander ; DIEUDONNÉ, Jean Alexandre E.: *Eléments de Géométrie Algébrique I*. Berlin : Springer, 1971 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 166)

- [Gro64] GROTHENDIECK, Alexander: Éléments de géométrie algébrique: IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Première partie. In: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 20 (1964), 5–259. http://www.numdam.org/item?id=PMIHES_1964__20__5_0
- [GW10] GÖRTZ, Ulrich ; WEDHORN, Torsten: *Algebraic Geometry I*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2010
- [Har77] HARTSHORNE, Robin: *Algebraic Geometry*. New York : Springer, 1977 (Graduate Texts in Mathematics 52)
- [Hum75] HUMPHREYS, James E.: *Linear Algebraic Groups*. 2. New York : Springer, 1975 (Graduate Texts in Mathematics 21)
- [Jac80] JACOBSON, Nathan: *Basic Algebra II*. 2. San Francisco : Freeman, 1980
- [Mat70] MATSUMURA, Hideyuki: *Mathematics Lecture Note Series*. Bd. 56: *Commutative algebra*. 2. Reading : Addison Wesley Longman, 1970
- [Mil17] MILNE, James S.: *Algebraic Groups*. Cambridge University Press, 2017 (Cambridge studies in advanced mathematics 170)
- [Spr98] SPRINGER, Tonny A.: *Progress in Mathematics*. Bd. 9: *Linear Algebraic Groups*. 2. Boston : Birkhäuser, 1998