Diversifikation unter eingeschränkter Kapitalmobilität: ein gleichgewichtstheoretischer Ansatz

Damir Filipovic
Ludwig-Maximilians-Universität München

Versicherungsmathematisches Kolloquium
24.Oktober 2005

Übersicht

- **Vergleich interner Modelle**
- Risikobasierte Kapitaladäquanz
- Risikomodellierung und –messung. Industrie-Beispiel: Kovarianzmethode
- Diversifikation unter eingeschränkter Kapital-mobilität

Solvency II

- Neues EU-System zur Bewertung der Gesamt-solvabilität, basierend auf einem prospektiven risiko-basierten Ansatz (initiiert 2001)
- 3 Pillars: quantitative Anforderungen, Prozesse und Aufsicht, Transparenz und Marktdisziplin
- Pillar 1: Solvency Capital Requirement (SCR) und Minimum Capital Requirement (MCR), Bewertung von Assets und Liabilities, Gruppen-***Diversifikation***, etc.
- Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors (CEIOPS) berät Solvency II Projekt durch 3 spezifische calls for advice (Aug 2004-Mar 2006)
- Formale Annahme durch EC geplant im Juli 2007

http://europa.eu.int/comm/internal_market/insurance/solvency_en.htm

Benchmarking Studie über Interne Modelle

- Ausgangslage: Fehlen eines aufsichtsrechtlichen Rahmens für die Evaluierung von internen Modellen (Solvency II Standardmodell, Pillar 1 und 2)
- Chief Risk Officer (CRO) Forum Benchmarking Studie:
  - Bestandesaufnahme der Risikomessmethoden unter den CRO Forum Mitgliedern
  - Auswertung und Vergleich der verschiedenen Methoden, auch mit SST und FTK
  - gemeinsamer Nenner (“Minimalstandards”)
  - Prinzipien zur aufsichtsrechtlichen Zulässigkeit von internen Modellen
  - Glossar und Terminologie

(Filipovic-Rost LMU: Benchmarking Study of Internal Models, 2005)

Klassifizierung/Differenzierung Interner Modelle

- *Kapitaladäquanz*
  - **Solvenz**: ökonomisch, regulatorisch, Ratingagentur
  - **Level**: Gruppe, Business Units
  - **Kapital**: Policyholder, Shareholder
- *Bewertung von Liabilities*: statutorisch, markt-konsistent
- *Risikomodellierung*: szenarienbasiert, statisches Faktor-modell, Kovarianzmodell, stochastisches Faktormodell
- *Risikomessung*
  - **Zeithorizont**: 1 Jahr, Mehrperioden
  - **Risikomass**: VaR, TailVaR, Ruinwahrscheinlichkeit
  - **Aggregation**: Aggregation von Standalone-Zahlen, Gesamtverteilung der P&L

Übersicht

- Vergleich interner Modelle
- **Risikobasierte Kapitaladäquanz**
- Risikomodellierung und –messung. Industrie-Beispiel: Kovarianzmethode
- Diversifikation unter eingeschränkter Kapital-mobilität

Verfügbares Risiko-Kapital (C)

$$C = A - L$$

Verfügbares Kapital   Wert der Assets   Wert der Liabilities

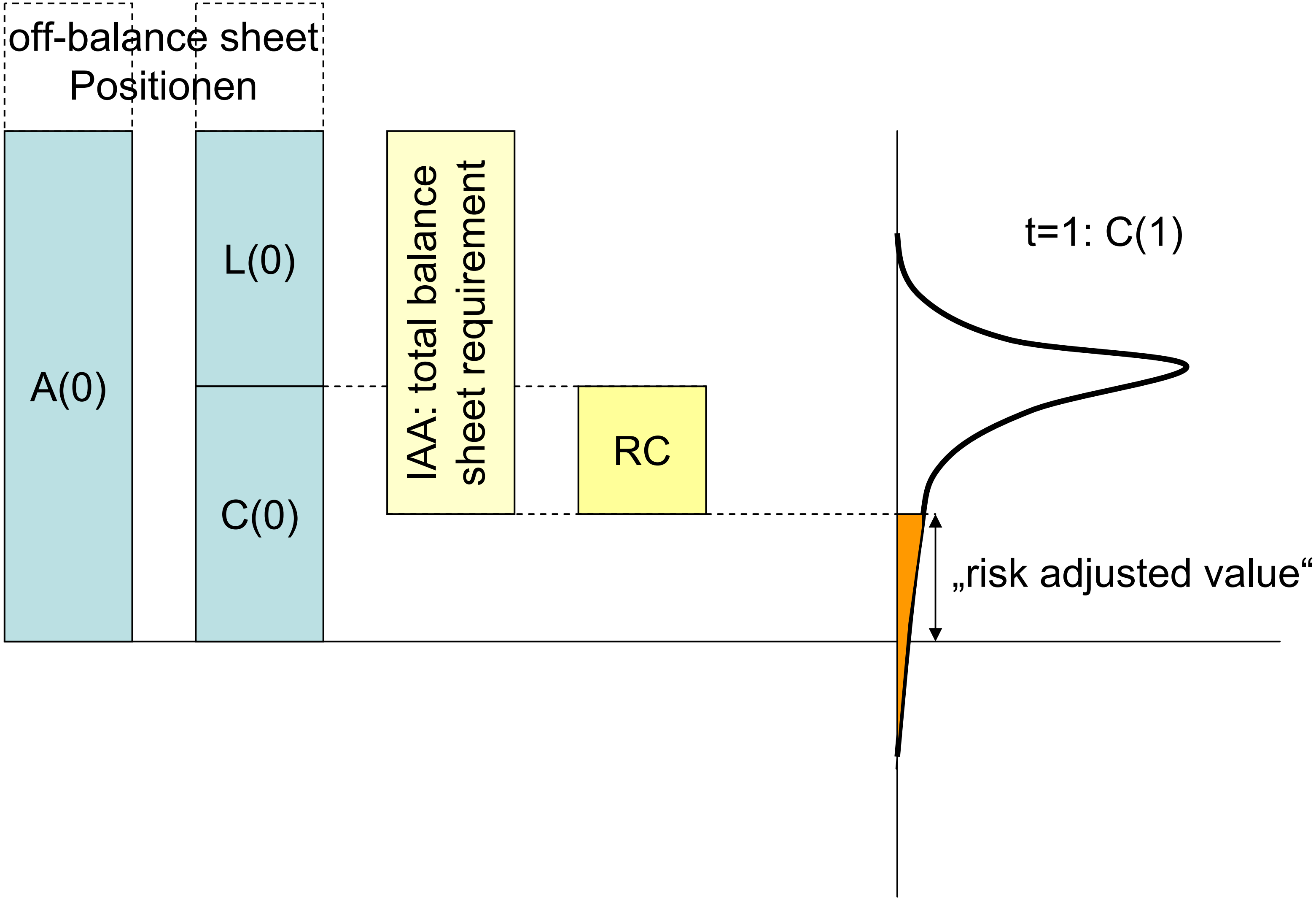
- Abhängig von der Auswahl und Bewertungsprinzipien der Assets und Liabilities

- Marktkonsistente Bewertung der Assets:
  - „marked to market“ falls verfügbar
  - sonst „marked to model“ (z.B. risikoneutrale Bewertung)

- Bewertung der Liabilities:

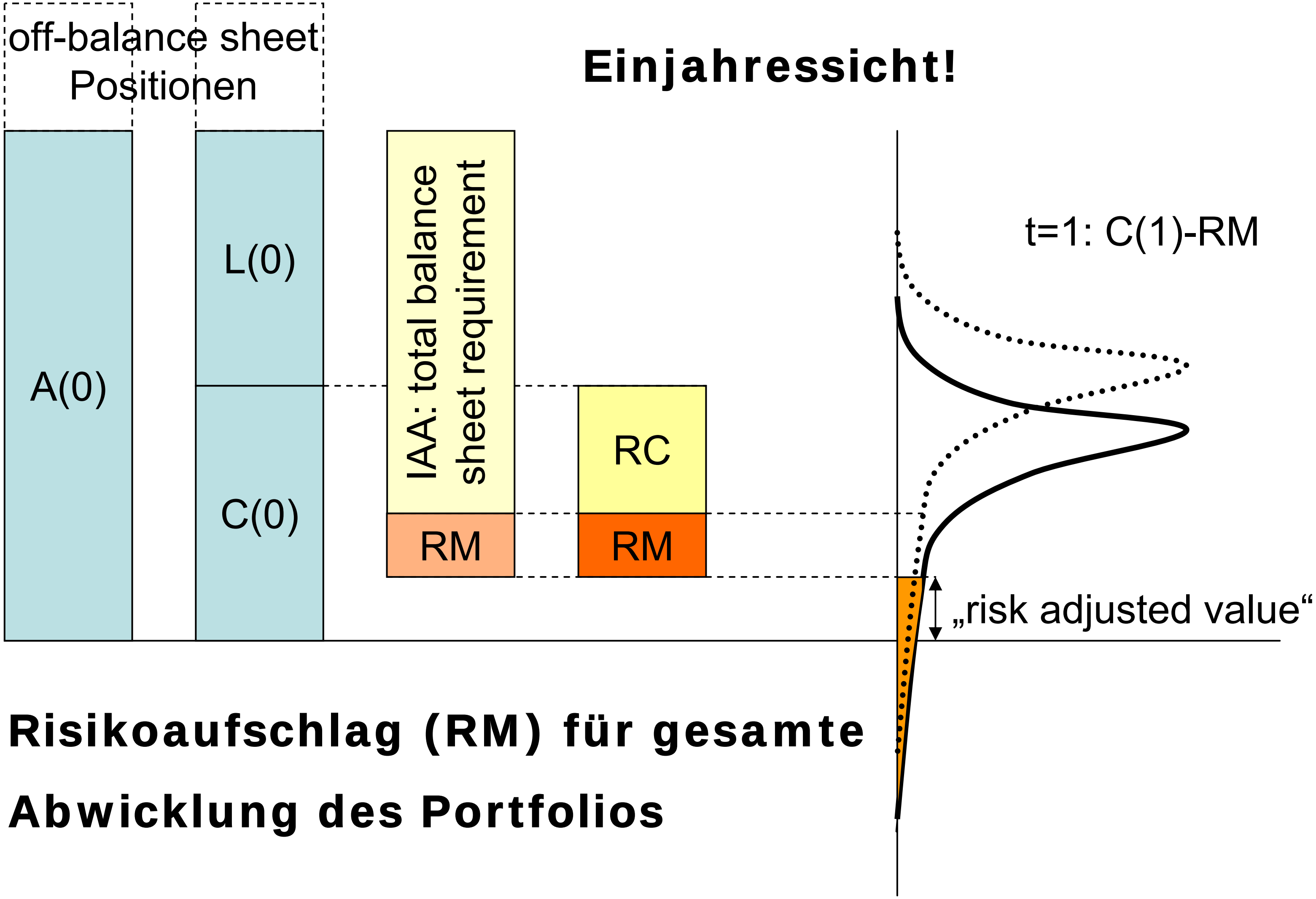
Statutory reserves	Risk margin Best estimate	Best estimate

Erfordertes Risiko-Kapital (RC)



Erfordertes Risiko-Kapital (RC)

Einjahressicht!



Risikoaufschlag (RM) für gesamte Abwicklung des Portfolios

Diversifikation

Diversifikation = Ausweitung des Portfolios auf verschiedene Risikoquellen (Produkte, Märkte, Länder, etc) statt Konzentration auf einzelne Bereiche

- die Vereinigung von vielen unabhängigen Einzelrisiken führt zu einem niedrigen Variationskoeffizienten der P&L

- Unabhängige Risikotypen (z.B. Markt- und Versicherungsrisiken) haben einen statistisch ausgleichenden Effekt auf die relative P&L-Variabilität

- ALM, Hedging: Ausgleich der Effekte von Risikofaktoren durch entgegengesetzte Portfoliosensitivitäten

Übersicht

- Vergleich interner Modelle
- Risikobasierte Kapitaladäquanz
- **Risikomodellierung und –messung. Industrie-Beispiel: Kovarianzmethode**
- Diversifikation unter eingeschränkter Kapitalmobilität

Industrie-Beispiel: Kovarianz-Methode

P&L = Summe von normal-verteilten Einzelpositionen:

$$\Delta C = C(1) - C(0) = \underbrace{Z_1 + \ldots + Z_n}_{\text{Diversifikation}}$$

Risikomass linear in Standardabweichung (VaR, TailVaR):

$$\rho(X) = \kappa\sqrt{Var(X)}$$

Kapitalallokation via Marginalmethode:

$$k_i = \frac{d}{dt}\rho\left(\Delta C + tZ_i\right)_{t=0} = \kappa\frac{\sum_j Cov\left(Z_i, Z_j\right)}{\sqrt{Var\left(\Delta C\right)}}$$

Kovarianz-Methode: Kapitalallokation

	Geography A			Geography B			…
Risk type	BU1	BU2	…	BU1	BU2	…	…
Market	k						
Credit							
Non-life Insurance							
Life Insurance							

Level 1: within risk types

$$k = \kappa\sqrt{Var(Z)}$$

(CRO Forum: “A framework for incorporating diversification in the solvency assessment of insurers”)

Kovarianz-Methode: Kapitalallokation

	Geography A			Geography B			…
Risk type	BU1	BU2	…	BU1	BU2	…	…
Market	k						
Credit							
Non-life Insurance							
Life Insurance							

Level 2: across risk types within BUs

$$k = \kappa \frac{\sum_{BU1} Cov(Z, Z_j)}{\sqrt{Var\left(\sum_{BU1} Z_j\right)}}$$

(CRO Forum: “A framework for incorporating diversification in the solvency assessment of insurers”)

Kovarianz-Methode: Kapitalallokation

	Geography A			Geography B			…
Risk type	BU1	BU2	…	BU1	BU2	…	…
Market	k						
Credit							
Non-life Insurance							
Life Insurance							

<u>Level 3</u>: across BUs within geography

$$k = \kappa \frac{\sum_{GeographyA} Cov(Z, Z_j)}{\sqrt{Var\left(\sum_{GeographyA} Z_j\right)}}$$

(CRO Forum: “A framework for incorporating diversification in the solvency assessment of insurers”)

Kovarianz-Methode: Kapitalallokation

	Geography A			Geography B			…
Risk type	BU1	BU2	…	BU1	BU2	…	…
Market	k						
Credit							
Non-life Insurance							
Life Insurance							

Level 4: across geographies or regulatory jurisdictions

$$k = \kappa \frac{\sum_{Group} Cov(Z, Z_j)}{\sqrt{Var\left(\sum_{Group} Z_j\right)}}$$

(CRO Forum: "A framework for incorporating diversification in the solvency assessment of insurers")

Probleme

- Kovarianz-Methode berücksichtigt keine “Tail-Abhängigkeiten” (→ Stresstests, Copulas!)

- Kovarianz-Kapitalallokation ist nicht “fair”

<u>Beispiel</u>:
3 BUs

A		B
BU1	BU2	BU3
k1	k2	k3

$$correlation = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

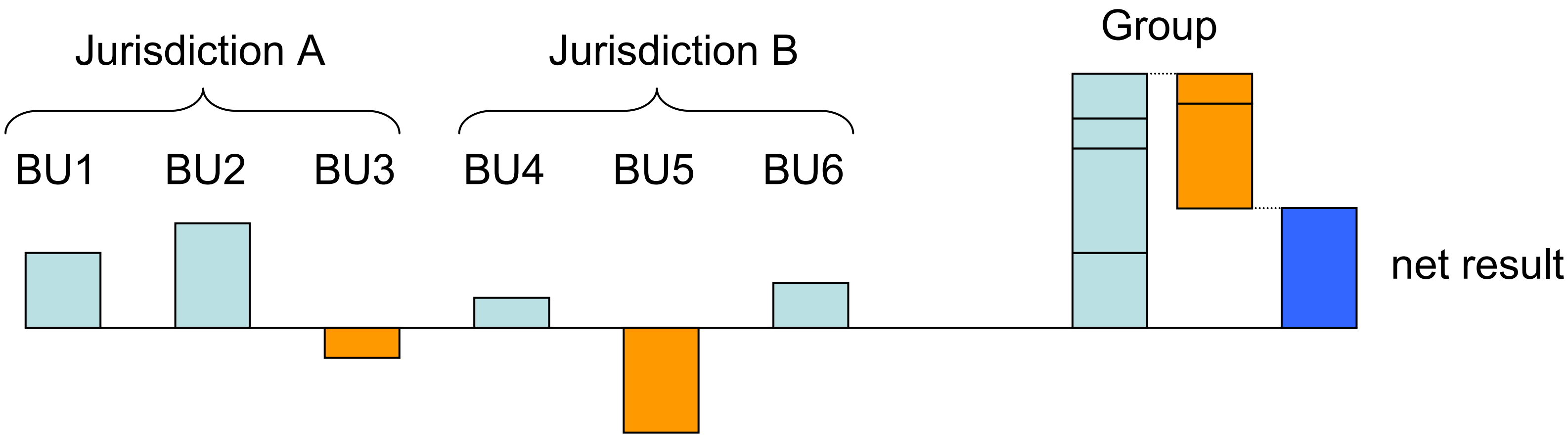
Level 1 (stand alone): $k1 = k2 = k3 = 100$

Level 3 (within geography A): $k1 = \frac{1+0}{\sqrt{1+1}} \times 100 = 70.71$

Level 4 (full diversification): $k1 = \frac{1+1}{\sqrt{1+1+1+2\times 1}} \times 100 = 89.44$

Probleme

- Kovarianz-Diversifikation erfordert volle Kapitalmobilität:



Regulatorisches Risiko: Regulatoren könnten freie Kapitalmobilität zwischen Ländern verhindern

Management Risiko: Firmenmanager könnten notwendige Kapitalzuführung verweigern

→ Standardisierung von Risiko- und Kapitaltransfers!

Übersicht

- Vergleich interner Modelle
- Risikobasierte Kapitaladäquanz
- Risikomodellierung und –messung. Industrie-Beispiel: Kovarianzmethode
- **Diversifikation unter eingeschränkter Kapital-mobilität**

Standardisierte Diversifikation: einfaches Beispiel

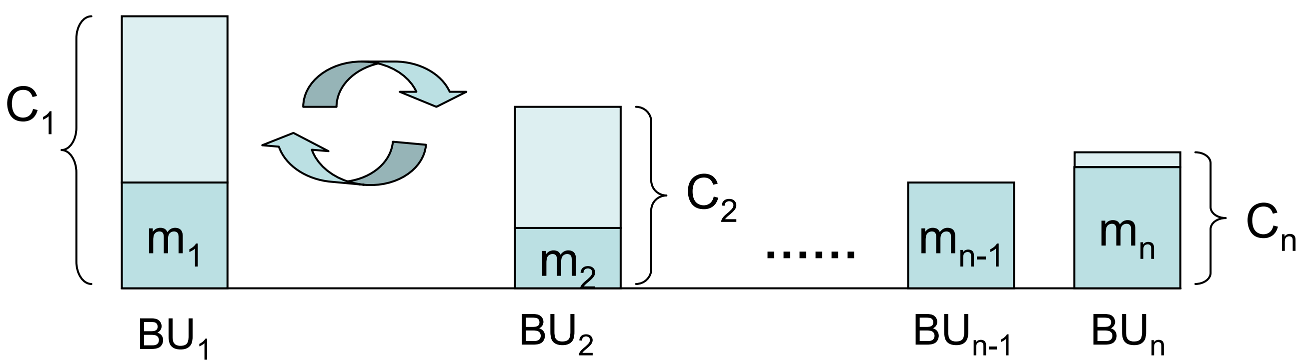
- *n* BUs mit zukünftigem **Verfügbarem Kapital** $C_1,\ldots,C_n$
- Jede BU unterliegt einer **Minimalkapitalanforderung** $m_1,\ldots,m_n$
- Alle BUs können zu **angemessenem Preis** am Überschuss $(C_i-m_i)^+$ von BU *i* teilhaben **(→Call Optionen)**
- **Neue Risikoposition** von BU *i* wird

$$C_i + \sum_j \lambda_{ij}\left(C_j - m_j\right)^+ + \gamma_i$$

Alte Position

Call Optionen

Cash



Optimierungsproblem

Finde optimalen Risikotransfer λ und Kapitaltransfer γ, welcher das aufsummierte Gruppen-Erforderte Kapital

$$\sum_i \rho\left(C_i + \sum_j \lambda_{ij} \left(C_j - m_j \right)^+ + \gamma_i \right)$$

minimiert unter der Clearing-Nebenbedingung

$$\sum_i \left(C_i + \sum_j \lambda_{ij} \left(C_j - m_j \right)^+ + \gamma_i \right) \leq \sum_i C_i$$

Frage: wie ändern sich die heutigen Bilanzwerte Assets und Liabilities unter diesem Risiko- und Kapitaltransfer?

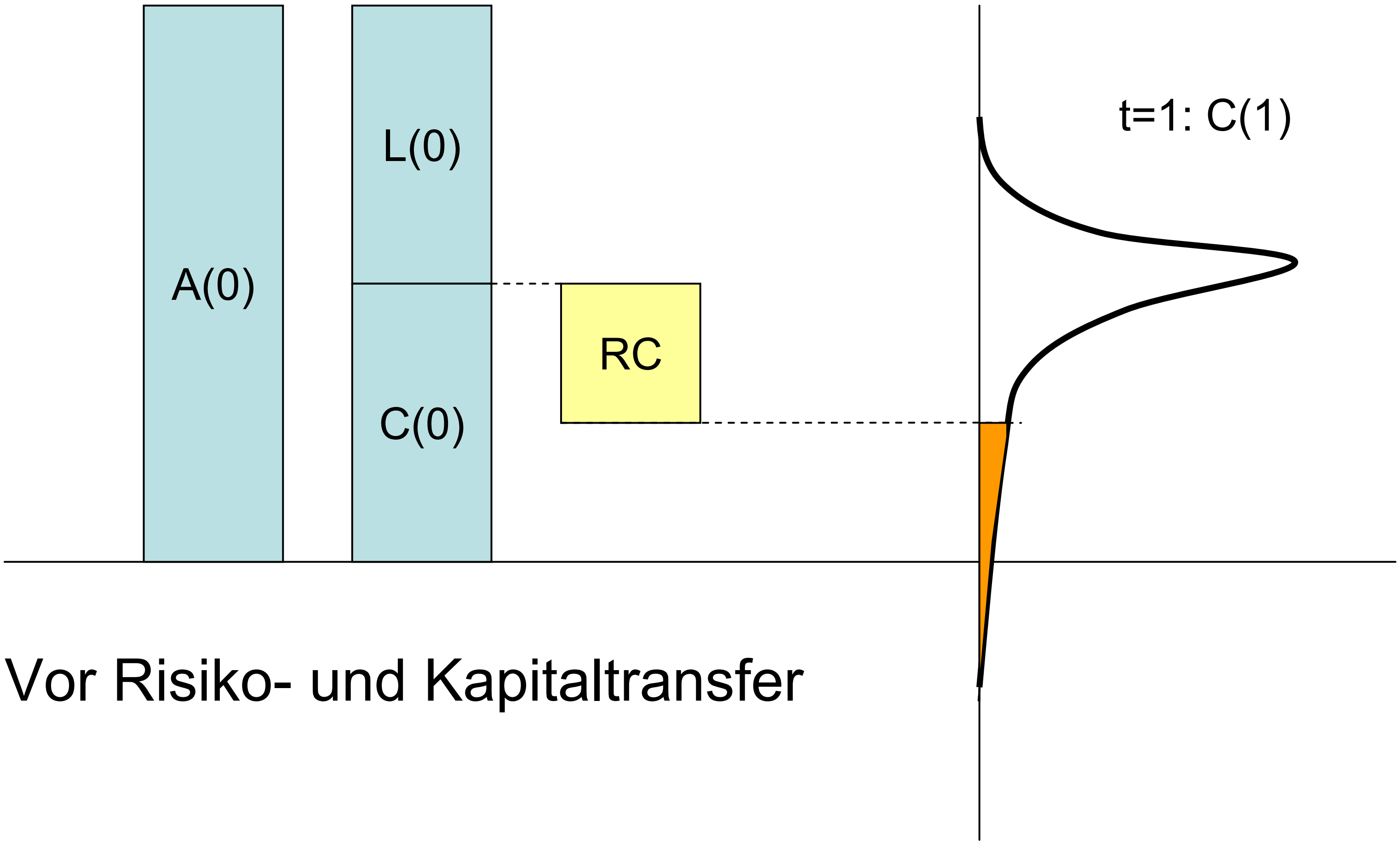
Mathematisches Resultat (Filipovic-Kupper, LMU)

Einen optimalen Risikotransfer λ und Kapitaltransfer γ gibt es genau dann, wenn eine **Gleichgewichts-Preisregel** existiert:

Jede individuelle Business Unit erreicht durch Risikotransfer λ und Kapitaltransfer γ maximale Reduktion ihres Erforderten Kapitals unter allen Risiko- und Kapitaltransfers, welche das Verfügbare Kapital (**Wert** der Assets minus **Wert** der Liabilities) bezüglich dieser Preisregel unverändert lassen.

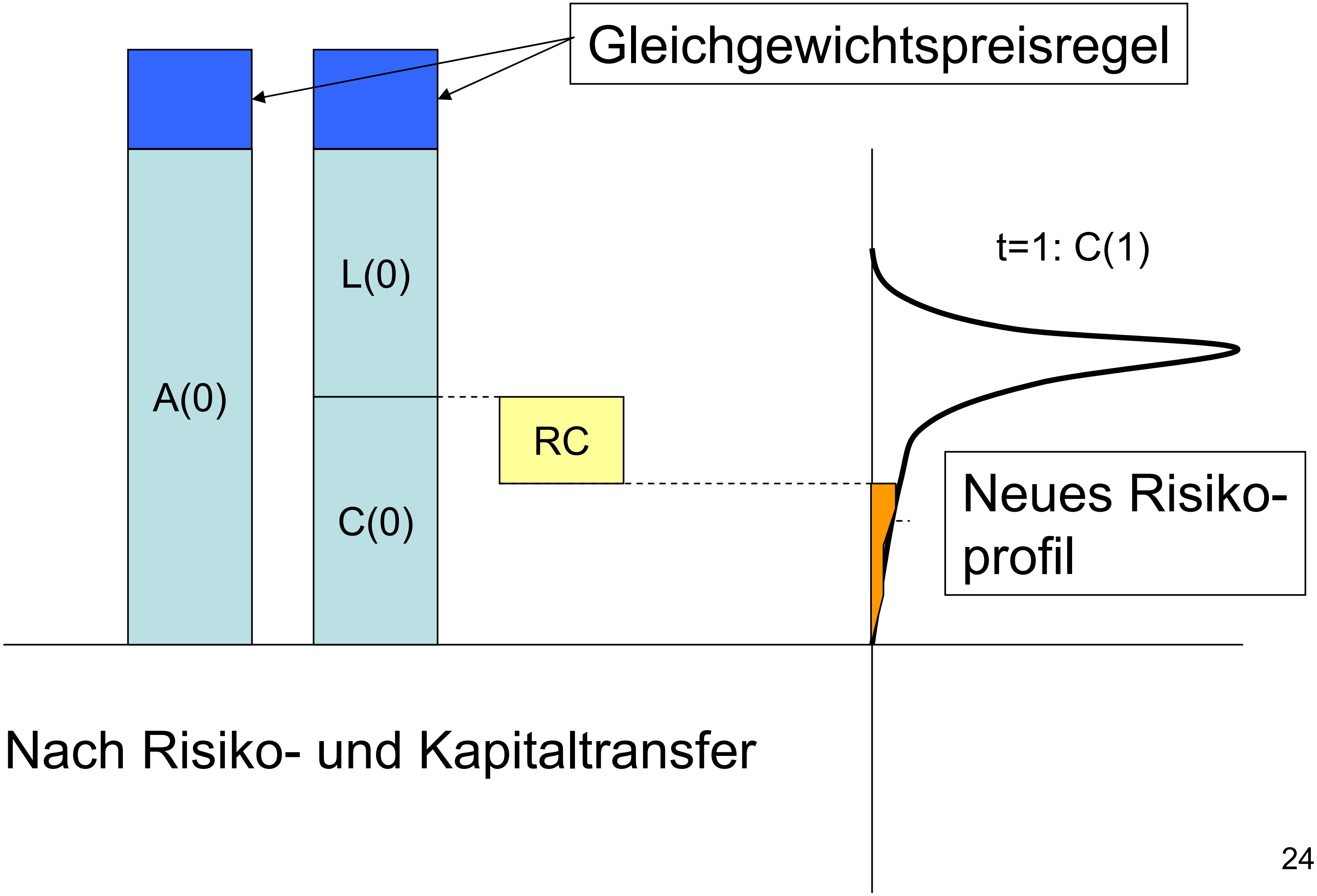
Diversifikation = Reduktion von Erfordertem Kapital RC

Diversifikation = Reduktion von RC



Vor Risiko- und Kapitaltransfer

Diversifikation = Reduktion von RC

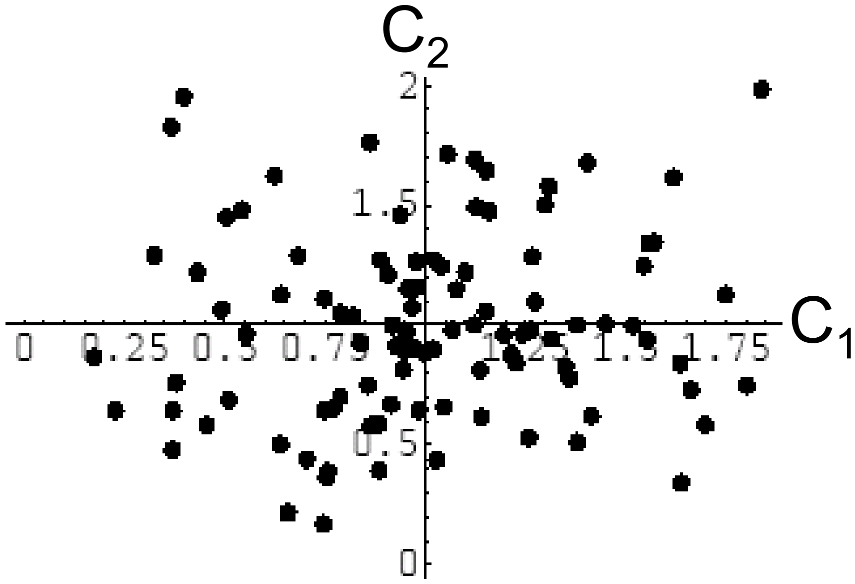


Nach Risiko- und Kapitaltransfer

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Verfügbares Kaptial

- heute: $C_1(0)= C_2(0)=100$ (Mio EUR)
- in einem Jahr: 100 Zustände, Erwartungswert je 100

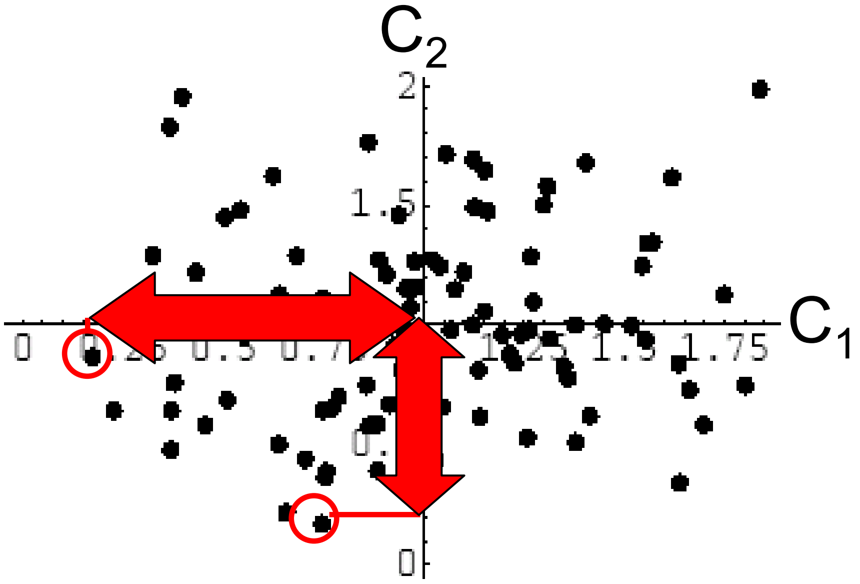


Risikomass: 99% TailVaR

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Verfügbares Kaptial

- heute: $C_1(0) = C_2(0) = 100$ (Mio EUR)
- in einem Jahr: 100 Zustände, Erwartungswert je 100



Erfordertes Kapital

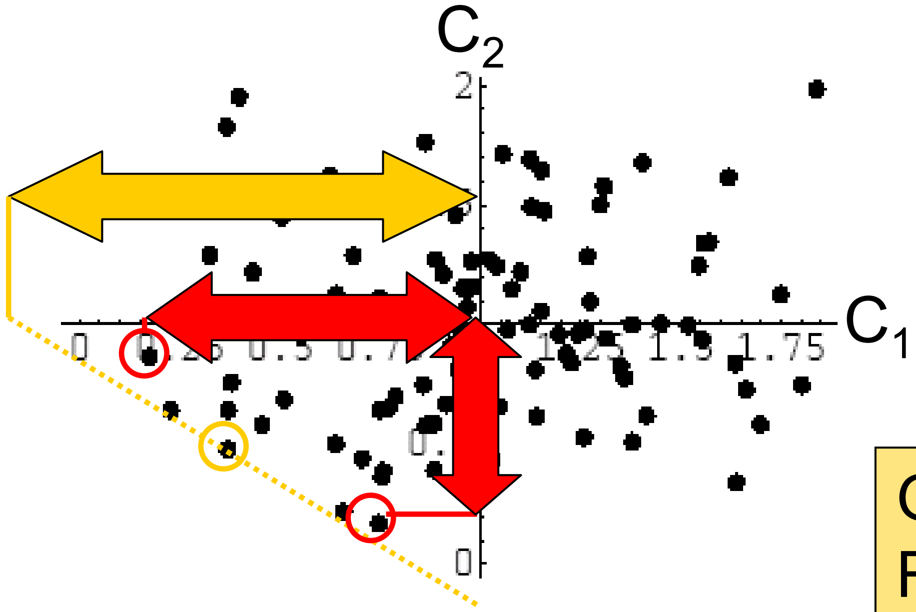
Stand alone
$RC_1 = 82.5$
$RC_2 = 82.9$

Risikomass: 99% TailVaR

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Verfügbares Kaptial

- heute: $C_1(0) = C_2(0) = 100$ (Mio EUR)
- in einem Jahr: 100 Zustände, Erwartungswert je 100



Risikomass: 99% TailVaR

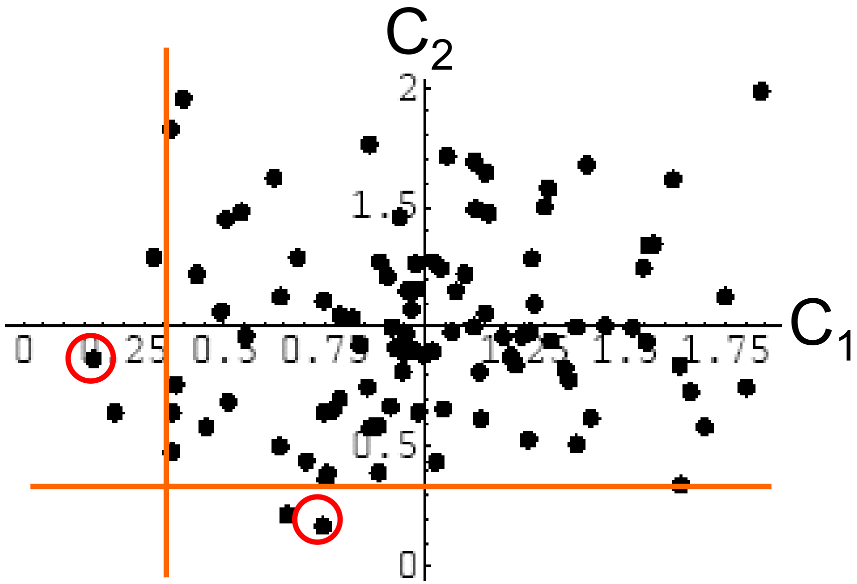
Erfordertes Kapital

Stand alone
$RC_1 = 82.5$
$RC_2 = 82.9$

Gruppe voll diversifiziert
$RC_{vd} = 115$ ($< RC_1 + RC_2$)

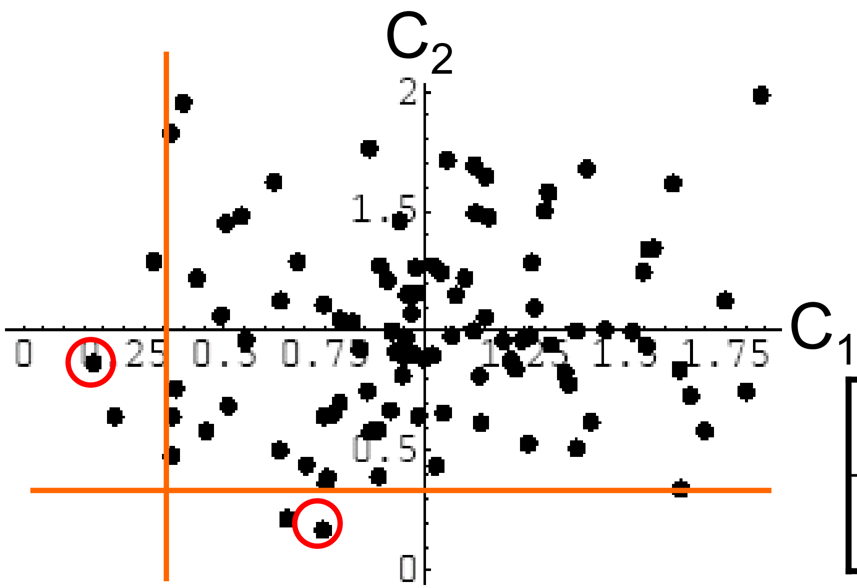
Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Minimal-Kapital = 40% RC (→SST): m_1=33, m_2=33.2



Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Minimal-Kapital = 40% RC (→SST): m_1=33, m_2=33.2



Optimaler Risikotransfer

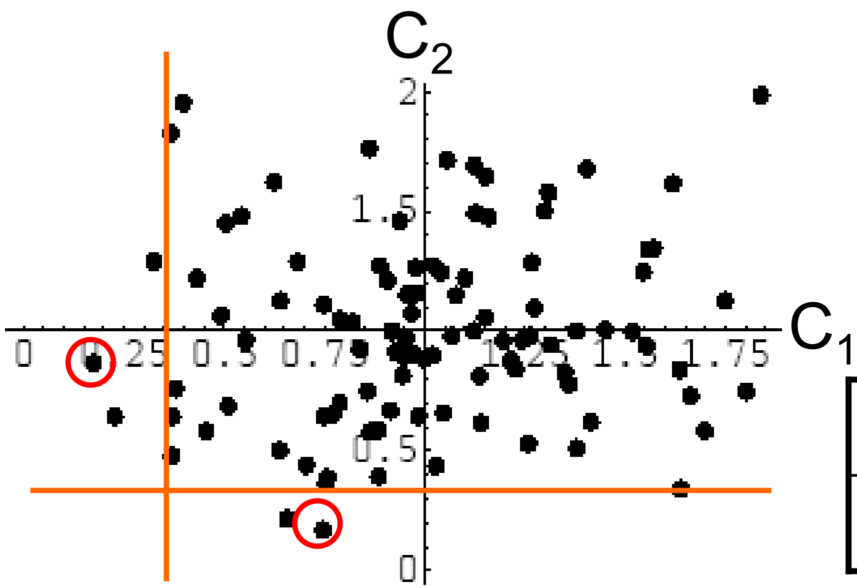
λ_{11}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{22}
-0.58	0.75	0.50	-0.81

Gleichgewichtspreise

$O_1=(C_1-m_1)^+$	$O_2=(C_2-m_2)^+$
4	15

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Minimal-Kapital = 40% RC (→SST): m_1=33, m_2=33.2



Optimaler Risikotransfer

λ_{11}	λ_{12}	λ_{21}	λ_{22}
-0.58	0.75	0.50	-0.81

Gleichgewichtspreise

$O_1=(C_1-m_1)^+$	$O_2=(C_2-m_2)^+$
4	15

Neue Positionen	RC (alt)
C1 – 0.58 x (O_1 – 4) + 0.75 x (O_2 – 15)	63 (82.5)
C2 + 0.50 x (O_1 – 4) – 0.81 x (O_2 – 15)	52 (82.9)

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Neue Positionen	RC (alt)
$C_1 - 0.58 \times (O_1 - 4) + 0.75 \times (O_2 - 15)$	63 (82.5)
$C_2 + 0.50 \times (O_1 - 4) - 0.81 \times (O_2 - 15)$	52 (82.9)
Summe = $C_1 + C_2 - 0.08 \times O_1 - 0.06 \times O_2 + 1.21$	115

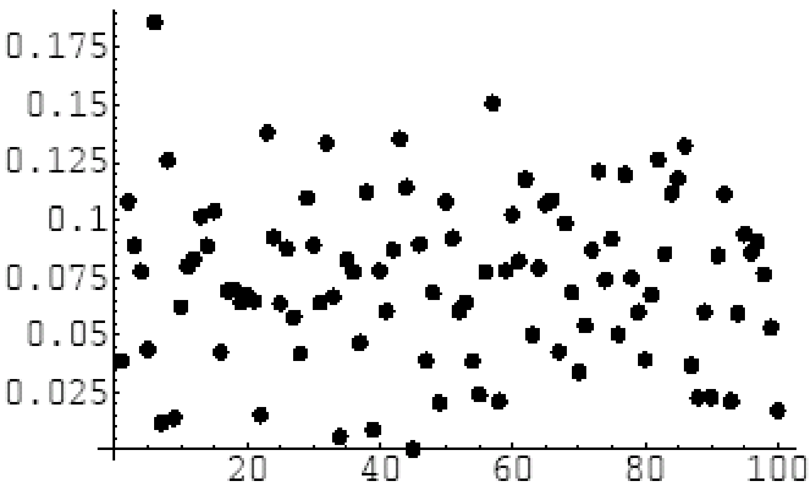
Voller Diversifikations-effekt

Beispiel: Gruppe mit 2 Business Units

Neue Positionen	RC	(alt)
$C_1 - 0.58 \times (O_1 - 4) + 0.75 \times (O_2 - 15)$	63	(82.5)
$C_2 + 0.50 \times (O_1 - 4) - 0.81 \times (O_2 - 15)$	52	(82.9)
Summe = $C_1+C_2-0.08xO_1-0.06xO_2+1.21$	115	

Voller Diversifikations-effekt

Clearing-Nebenbedingung:
Summe < $C_1 + C_2$



Überschuss
in 100 Mio EUR
für 100 Modellpunkte

Zusammenfassung

Neue Methode zur **Bewertung und Messung von Risiko- und Kapitaltransfers** zwischen Business Units

Verfügbares Kapital bleibt gleich (Gleichgewichtspreis) bei maximaler Reduktion von Erfordertem Kapital (Optimierung) → **hoher Diversifikationseffekt**

Diversifikation wird **aufsichtsrechtlich anerkennbar** durch Standardisierung dieser Methode