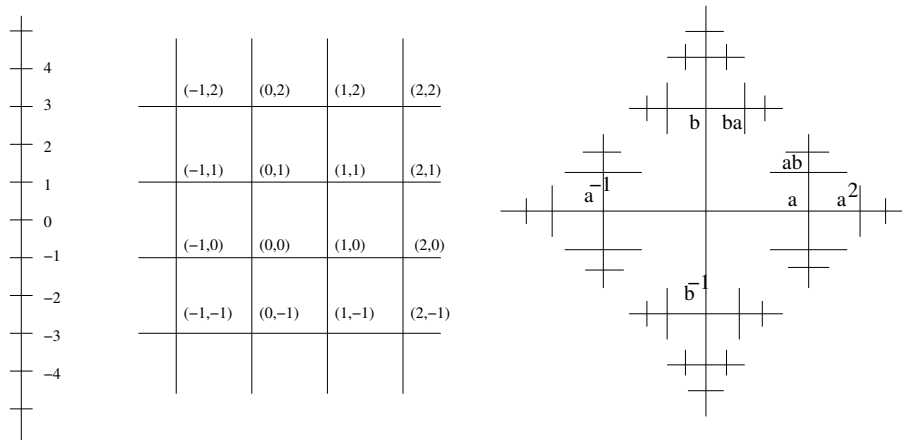


Topologische Methoden in der Gruppentheorie - SoSe 2016

In diesem Seminar sollen grundlegende Begriffe der geometrischen Topologie erarbeitet werden. Insbesondere wollen wir die Fundamentalgruppe studieren. Im Vordergrund steht ihre Berechnung (insbesondere der Satz von Seifert-van Kampen) und der Zusammenhang zwischen Untergruppen der Fundamentalgruppe und Überlagerungen. Als Anwendungen erhält man Sätze über die Struktur gewisser Gruppen auf elegante und transparente Weise.



Im zweiten Teil dieses Seminars studieren wir Enden von Gruppen. Ein klassischer Satz von Freudenthal zeigt, dass eine endlich erzeugte Gruppe entweder kein, ein zwei oder unendlich viele Enden hat. Das Bild oben zeigt mögliche Cayleygraphen der Gruppen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ mit zwei, einem bzw. unendlich vielen Enden.

Die wichtigste Quelle für diesen Satz ist der Aufsatz *Topological methods in group theory* von P. Scott und T. Wall in *Homological group theory* von C. T. C. Wall.

Zielgruppe: Das Seminar richtet sich an Studenten der Mathematik am Ende des Bachelorstudienganges oder zu Beginn des Masterstudienganges. Es ist eine gute Ergänzung zu den Vorlesungen *Geometrie und Topologie von Flächen* sowie *Riemannsche Geometrie*. Hörer der Vorlesung *Topologie 2* sind ebenso herzlich willkommen, einige Inhalte des Seminars wurden aber schon in der Vorlesung *Topologie 1* behandelt.

Vorkenntnisse: Analysis 1-3 (insbes. die dort eingeführten Grundbegriffe aus der Topologie), Lineare Algebra 1-2 (insbes. Gruppen).

Termin: Donnerstag, 10-12 Uhr in Raum B039

Vorbesprechung: Donnerstag, 14. April 2016 um 10:00 Uhr, Raum B039

LITERATUR

- [Se] J. P. Serre, *Trees*, Springer 1980.
- [Wa] C. T. C. Wall, *Homological group theory*, LMS Lecture Note Series 36, Cambridge University Press 1979.

Topologische Methoden in der Gruppentheorie

Programm

1. **Freie Gruppen, Amalgamierte Produkte, HNN-Erweiterungen**
Definitionen, Normalformen für Gruppen-Elemente, Beispiele
Literatur: [Wa] S. 137–147, [Se] S. 2–6.
Vortragender: **J.K.**
Datum: 21.4.
2. **Fundamentalgruppe - Definition, Eigenschaften, $\pi_1(S^1)$, Produkte**
Definieren Sie die Begriffe Homotopie (soweit wie nötig, also Homotopien von Wegen), Fundamentalgruppe. Erklären sie einfache Eigenschaften und beweisen Sie $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$. Als Anwendung kann man den Brouwerschen Fixpunktsatz für stetige Abbildungen der abgeschlossenen Scheibe in sich zeigen.
Literatur: [SZ] S. 100–110. Siehe auch [SZ] S. 47–52 sowie jedes beliebige Lehrbuch dessen Titel die Worte *algebraische Topologie* enthält.
Vortragender: **L.B.**
Datum: 28.4.
3. **Satz von Seifert-van Kampen**
mit Beweis. Erklären Sie HNN-Erweiterungen in diesem Zusammenhang noch einmal.
Literatur: [SZ] S. 111–118, [Wa] 138–139.
Vortragender: **J. P.**
Datum: **Mi 4.5., 12-14 Uhr, Raum 349**
4. **Anwendungen von Seifert-van Kampen: Präsentationen von Gruppen und Zellenkomplexe, Satz von Grushko**
Zu einer Präsentation einer Gruppe G konstruiert man einen Zellenkomplex (mit höchstens zwei-dimensionalen Zellen) X_G , so dass $\pi_1(X_G) \simeq G$.
Literatur: [SZ] S. 117–131, Informationen zu Zellenkomplexen findet man in [SZ] Kapitel 4, wir benötigen fast nur die Definitionen. Grushko's Theorem findet man in [Wa] S. 148–150.
Vortragender: **M.H.**
Datum: 11.5.
5. **Knotengruppen - Wirtingerpräsentation, Fox-Artin wild arc, Torusknoten**
Definition von Knoten, Fundamentalgruppe des Knotenkomplements, Beweis der Existenz nicht trivialer Knoten. Fox-Artin haben ein Beispiel einer Einbettung $I \rightarrow \mathbb{R}^3$ angegeben, welche nicht äquivalent zur Standardeinbettung ist. Unterscheidung von Torusknoten, vielleicht Beweis, dass die linkshändige und die rechtshändige Kleeblattschlinge nicht isotop sind.
Literatur: [St] S. 144–156, die Wirtingerdarstellung findet man in jedem Buch zur Knotentheorie
Vortragender: **A.S.** Datum: 18.5.
6. **Überlagerungen 1**
Definition, Beispiele, Blätterzahl, Hochheben von Wegen
Literatur: [SZ] S.146–157, [Jä] Kapitel 9
Vortragender: **D.Be.**
Datum: 25.5.
7. **Überlagerungen 2**
Universelle Überlagerung, Beispiele, Liftungsverhalten, Deckbewegungen

Literatur: [SZ] 157–164, [Jä] Kapitel 9

Vortragender: **M.G.**

Datum: 2.6.

8. **Überlagerungen 3, Reidemeister-Schreier Methode, Satz von Kurosh**

Klassifikation von Überlagerungen durch Untergruppen der Fundamentalgruppe. Weil man erst jetzt weiss, dass Untergruppen freier Gruppen frei sind, hat man erst jetzt bewiesen, dass jede Gruppe eine Präsentation hat.

Literatur: [SZ], 164–166, 171–174, [Se] S. 29–30.

Vortragender: **M.P.**

Datum: 9.6.

9. **Untergruppen von $A *_C B$ und $A *_C$, Graphen von Gruppen, Cayley-graphen**

Mögliche Beispiele: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$, eventuell: Klassifikation von Überlagerungen durch die Monodromiedarstellung

Literatur: [Wa] 151–163, [SZ] 171–174, [Se] S. 41–45

Vortragender: **I.A.**

Datum: 16.6.

10. **Enden von Gruppen, Satz von Freudenthal**

Literatur: [Wa], 171–177

Vortragender: **W.S.**

Datum: 23.6.

11. **Struktur von Gruppen mit mindestens zwei Enden**

Literatur: [Wa], 178–188

Vortragender: **I.B.**

Datum: 7.7.

12. **Anwendungen**

Literatur : [Wa], 188–198

Vortragender: **D.Br.**

Datum: 14.7.

13. **Gruppenoperationen auf Bäumen: Bass-Serre Theorie**

Aus Zerlegungen von Gruppen in amalgamierte Produkte oder HNN-Erweiterungen erhält man Operationen auf Bäumen. Betrachten Sie auch einfache Beispiele: $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Eine Operation von G auf einem Baum erhält man auch dann, falls eine unendliche Folge $G_0 \subset G_1 \subset G_2 \dots \subset G$ existiert, so daß $G = \bigcup_n G_n$.

Literatur: [Wa], 165–171, [Se] S. 58–59

Vortragende: **N.N.**

14. **Gruppenoperationen auf Bäumen 2: Bass-Serre Theorie**

Umgekehrt erhält man aus einer Gruppenoperation auf einem Baum ohne Fixpunkte (und einer weiteren Bedingung) eine Zerlegung als amalgamiertes Produkt/HNN-Erweiterung.

Literatur: [Wa], 165–171, [Se] S.58–61

Vortragender: **N.N.**

15. **$\text{Sl}(3, \mathbb{Z})$**

Zeigen Sie, dass $\text{Sl}(3, \mathbb{Z})$ kein amalgamiertes Produkt ist. In Serre wird nur dieser Fall betrachtet, HNN Erweiterungen aber nicht.

Literatur : [Se] S. 64–67.

Vortragender: **N.N.**

LITERATUR

- [Ba] G. Baumslag, *Topics in compinatorial group theory*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser 1993.
- [Jä] K. Jänich, *Topologie*, Springer 1996.
- [L] C. Löh, *Geometric group theory, an introduction*, http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/teaching/ggt_ws1011/
- [Se] J. P. Serre, *Trees*, Springer 1980.
- [St] J. Stillwell, *Classical Topology and combinatorial group theory*, Graduate Texts in Mathematics 72, 2. ed, Springer 1993.
- [SZ] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, Teubner Verlag 1994.
- [Wa] C. T. C. Wall, *Homological group theory*, LMS Lecture Note Series 36, Cambridge University Press 1979.